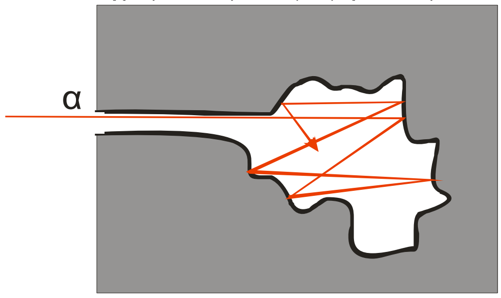
7. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

- Ακτινοβολία μέλανος σώματος
- Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο
- Φαινόμενο Compton
- Κυματικές ιδιότητες σωματιδίων Louis de Broglie
- Η εξίσωση του Schrodinger
- Πηγάδια Δυναμικού - Φαινόμενο σήραγγας

§7.2 Ακτινοβολία μέλανος σώματος ή θερμική ακτινοβολία

1) Γνωρίζουμε ότι **η θερμότητα μπορεί να διαδοθεί** όχι μόνο με αγωγή και με ρεύματα μεταφοράς αλλά **και με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας**, μια μορφή ενέργειας, η οποία φυσικά διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός.
Το αίτιο αυτής της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ή απλά θερμικής ακτινοβολίας είναι η θερμοκρασία ενός σώματος.



Μέλαν σώμα θεωρούμε εκείνο το σώμα που απορροφάει όλη την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει πάνω του σε όλο το φάσμα της (όλες τις συχνότητες). Δηλαδή είναι μια ιδανική τελείως απορροφητική επιφάνεια.

Ένα μέλαν σώμα μπορεί να προσεγγιστεί από την κοιλότητα του σχήματος (έτσι ώστε το φως που παίρνουμε πίσω **από ανάκλαση** να είναι **αμελητέο),** υπό την προϋπόθεση ότι έχει επέλθει θερμική ισορρ**οπία**.
Κάθε ακτινοβολία που περνάει από την οπή **α** και εισέρχεται μέσα στην κοιλότητα, ανακλάται στην ανώμαλη επιφάνεια μέχρι να απορροφηθεί πλήρως. Έτσι η οπή **α** είναι ένα μέλαν σώμα.

Το μέλαν σώμα εκπέμπει μόνο **θερμική** ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που **οφείλεται στη θερμοκρασία του T** (διαφορά θερμοκρασίας με το περιβάλλον) και **όχι φως από ανάκλαση ή από διάχυση κ.λπ.** και ούτε αφήνει το φως να το διαπεράσει.

Το μέλαν σώμα λοιπόν είναι ένας **ιδανικός εκπομπός θερμικής ακτινοβολίας** και αποτελεί ένα μοντέλο. Δηλαδή το μέλαν σώμα **απορροφά ιδανικά όλες** τις ακτινοβολίες, έρχεται σε θερμική ισορροπία και τελικά παίρνουμε φως μόνο από εκπομπή θερμικής ακτινοβολίας (θερμότητας) από το ίδιο σώμα λόγω διαφοράς θερμοκρασίας με το περιβάλλον του. Λέμε ότι ο συντελεστής εκπομπής του μέλανος σώματος θα είναι ίσος με την μονάδα, ενώ για οποιοδήποτε άλλο πυρακτωμένο σώμα είναι μικρότερος του 1.
Ένα μέλαν σώμα μπορεί να έχει οποιοδήποτε χρώμα. Στην πραγματικότητα υπάρχουν όλα τα χρώματα του συνεχούς φάσματος της ηλεκτρομανητικής ακτινοβολίας και στο ίδιο ποσοστό, ανεξάρτητα από το πιο είναι το στερεό που εκπέμπει την ακτινοβολία. Όμως το **μέγιστο της ακτινοβολίας** δηλαδή αυτό που αντιλαμβάνεται το μάτι μας βρίσκεται σε μήκη κύματος που εξαρτώνται μόνο από τη θερμοκρασία. Όσο πιο

υψηλή είναι η θερμοκρασία, τόσο σε **μικρότερα μήκη κύματος** βρίσκεται αυτή και τόσο **μεγαλύτερη είναι και η ένταση** της ακτινοβολίας.

Έτσι το **χρώμα** που «βλέπουμε» εξαρτάται **μόνο από τη θερμοκρασία Τ**, η οποία με τη σειρά της καθορίζει και το **μέγιστο μήκος κύματος λ_{max}**, δηλαδή το μήκος κύματος στο οποίο έχουμε τη **μεγαλύτερη ένταση Ι** της εκπεμπόμενης θερμικής ακτινοβολίας. Λέμε λοιπόν ότι η ακτινοβολία έχει χάσει οποιαδήποτε πληροφορία σχετική με τις ιδιότητες των τοιχωμάτων της κοιλότητας - οπής ή των σωμάτων που την εκπέμπουν εκτός από την θερμοκρασία τους.

Το μέλαν σώμα σε θερμοκρασία δωματίου φαίνεται μαύρο όχι γιατί δεν εκπέμπει θερμική ακτινοβολία, αλλά γιατί εκπέμπει κυρίως στην υπέρυθρη περιοχή.

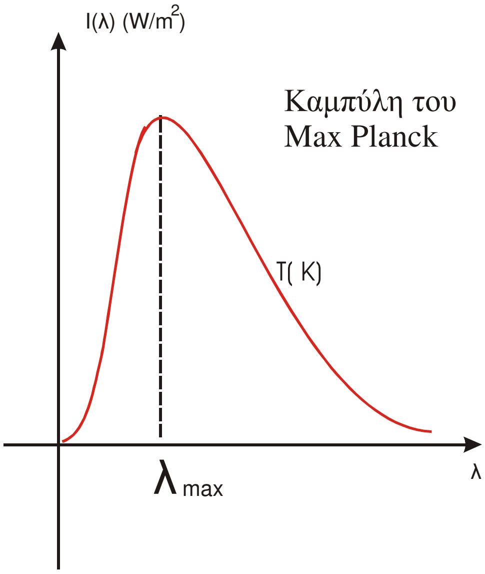
Ακόμη μπορούμε να θεωρήσουμε με πολύ καλή προσέγγιση πως και **κάθε πυρακτωμένο σώμα** συμπεριφέρεται ως προς την εκπομπή της θερμικής του ακτινοβολίας ως μέλαν σώμα.

Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος έχει λοιπόν τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

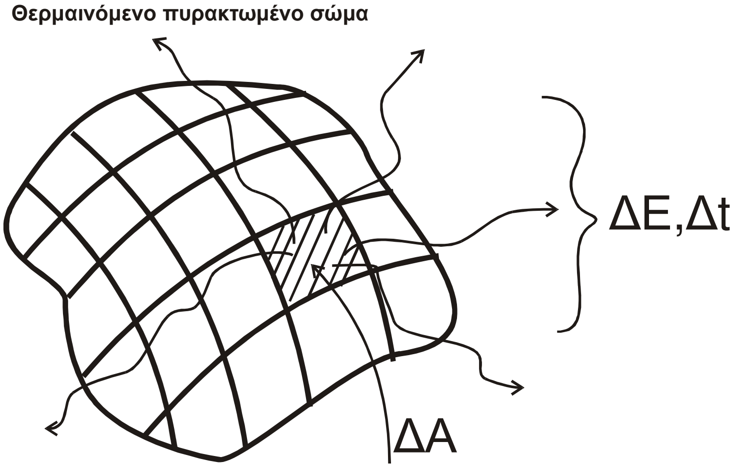
α) Έχει συνεχές φάσμα. Αν πρόκειται για στερεό ή υγρό σώμα (συμπυκνωμένη ύλη). Επειδή στα στερεά το φάσμα εκπομπής και απορρόφησης είναι συνεχές, στο τέλος ένα μέλαν σώμα θα απορροφήσει όλη την ακτινοβολία δηλαδή όλο το φως που θα πέσει πάνω του και επίσης θα εκπέμψει συνεχές φάσμα σε όλα τα μήκη κύματος.
β) Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος **είναι παγκόσμια**.
Το συνεχές φάσμα που θα εκπέμψει το μέλαν σώμα δηλαδή τελικά ένα πυρακτωμένο σώμα μιας ορισμένης θερμοκρασίας είναι παγκόσμιο δηλαδή το ίδιο και ανεξάρτητο από τη χημική σύσταση του θερμαινόμενου σώματος που εκπέμπει την ακτινοβολία. Δηλαδή το φως αυτό δε φέρνει πληροφορία για το σώμα που το εκπέμπει δηλαδή δεν έχει στοιχεία ταυτότητας του ακτινοβολούμενου σώματος. Η μόνη πληροφορία που κουβαλάει είναι η θερμοκρασία του σώματος.

γ) Εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία του σώματος.

δ) Η καμπύλη που περιγράφει τη μεταβολή της έντασης της ακτινοβολίας σε συνάρτηση με τα μήκη κύματος που εκπέμπει σε μια ορισμένη θερμοκρασία είναι **παγκόσμια ονομάζεται καμπύλη του Max Planck** και είναι αυτή του σχήματος.



Η ένταση της ακτινοβολίας I είναι ίση με $I=\frac{E_{ολ}}{ΔA \cdot Δt}=\frac{P}{ΔA}$, όπου $E_{ολ}$ είναι η ολική ενέργεια της εκπεμπόμενης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και P είναι η ισχύς της με $P=\frac{E_{ολ}}{Δt}$ και η I έχει μονάδα μέτρησης το $J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$ ή $W \cdot m^{-2}$.



ΔΑ είναι ένα στοιχείο της επιφάνειας -
-στοιχειώδης επιφάνεια από το οποίο εκπέμπεται ΗΛΜ ακτινοβολία σε 'ολο το φάσμα.

I είναι η ένταση δηλαδή η ενέργεια ΔΕ =Εολ που εκπέμπεται ανά μονάδα επιφάνειας ΔΑ και ανά μονάδα χρόνου Δt

Σχόλιο:

- Η ένταση I της ακτινοβολίας γράφεται σε απόσταση r από την πηγή ισχύος P και $I=\frac{P}{ΔA}=\frac{P}{4\pi r^2}$, όπου $4\pi r^2$ είναι το εμβαδό σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r. Άρα ισχύει ότι η ένταση της ακτινοβολίας πηγής σταθερής ισχύος P, σε απόσταση r εξαρτάται **μόνο** από την απόσταση r και ισχύει: $I \sim \frac{1}{r^2}$.
- Η ισχύς P΄ για ένα τμήμα ΔΑ΄ της σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r (άρα σε απόσταση r από την πηγή), είναι $P'=I \cdot ΔA'$.
- Η ολική ενέργεια $E_{ολ}$ τότε στην επιφάνεια ΔΑ΄ σε χρόνο Δt είναι $E_{ολ}=P' Δt$. Συνοψίζοντας προκύπτει $E_{ολ}= I \cdot ΔA' \cdot Δt=\frac{ΔA'}{4\pi r^2} \cdot P \cdot Δt$. Η οποία $E_{ολ}$ είναι βέβαια για πλήθος N φωτονίων μονοχρωματικής ακτινοβολίας συχνότητας f και $E_{ολ}=Nhf$.

Η μαθηματική έκφραση της καμπύλης κατανομής της έντασης της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος στα διάφορα μήκη κύματος όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα περιγράφεται από την **εξίσωση του Planck** (1899).

$$\mathbf{J(f,T) = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1}}.$$

Όπου J(f,T) είναι η φασματική ένταση. Που είναι η ένταση της ακτινοβολίας ανά μονάδα συχνότητας και έχει μονάδα μέτρησης το $W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1}$.
Η παραπάνω έκφραση του Planck εμπεριέχει και τους δύο εμπειρικούς Νόμους που περιγράφουν την ακτινοβολία του μέλανος σώματος.

Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος περιγράφεται από δυο εμπειρικούς Νόμους :

α) Εμπειρικός **Νόμος των Stefan – Boltzmann (S-B),**

Η ολική ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από την επιφάνεια (ισχύς / μονάδα επιφάνειας) του μέλανος σώματος (ιδανικός ακτινοβολητής) είναι:

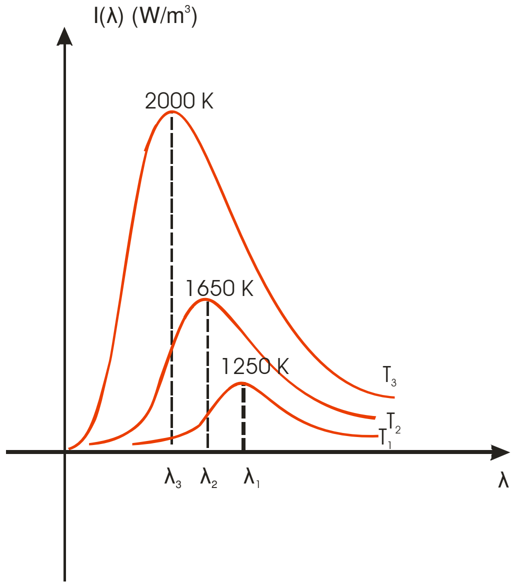
$$\mathbf{I = \sigma \cdot T^4}$$

όπου σ: σταθερά των Stefan – Boltzmann και σε S . I είναι $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{W}{m^2.k^4}$.

β) Εμπειρικός **Νόμος του Wien.**

Η ένταση της εκπεμπόμενης θερμικής ακτινοβολίας (ισχύς / μονάδα επιφάνειας), δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σ' όλα τα μήκη κύματος .

Η κατανομή της έντασης Ι (λ) στα διάφορα μήκη κύματος της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος (ιδανικός ακτινοβολητής) φαίνεται στο σχήμα.



- Υπάρχει σε κάθε θερμοκρασία ένα μήκος κύματος (λ_1 , λ_2 , λ_3) αντίστοιχα) για το οποίο η εκπεμπόμενη ισχύς είναι μέγιστη .
- Καθώς όμως η θερμοκρασία αυξάνει , αυξάνεται και η μέγιστη ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας αλλά το μήκος κύματος στο οποίο παρατηρείται το μέγιστο, μετατοπίζεται προς τ' αριστερά σε μικρότερα μήκη κύματος . Δηλαδή το μήκος κύματος λ_{max} στο οποίο παρατηρείται η μέγιστη ένταση (κορυφή της καμπύλης), είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόλυτης θερμοκρασίας Τ . Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\lambda_{max} \cdot T = \text{σταθερά} = 3 \cdot 10^{-3}\ (m \cdot K)}$$

Νόμος μετατόπισης του **Wien**.

- Δηλαδή καθώς η θερμοκρασία αυξάνει , το ύψος της κορυφής Ι (λ) μεγαλώνει και η κορυφή μετατοπίζεται προς μικρότερα μήκη κύματος . Δηλαδή όταν αυξάνει η Τ καμπύλη πηγαίνει αριστερά και πάνω . Γι' αυτό ένα σώμα που ακτινοβολεί και φαίνεται μπλε είναι πιο θερμό από αυτό που έχει κόκκινο χρώμα γιατί έχει μικρότερο μήκος κύματος λ_m .
- Το συνολικό εμβαδό της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη είναι σε κάθε θερμοκρασία , η ολική ακτινοβολούμενη ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας όπως υπολογίζεται από τη σχέση $I = \sigma \cdot T^4$.

Παραδείγματα:

1)Θερμομετρήστε το μάτι της ηλεκτρικής κουζίνας αν έχει ακτίνα r=10cm και ισχύ P=1KW.

Για το εμβαδό του ηλεκτρικού ματιού ισχύει $S=\pi r^2=10^{-2}\pi\ m^2$. Ακόμη ισχύει $I=\dfrac{E}{dS \cdot dt}=\dfrac{P}{dS}$ άρα $I=\dfrac{P}{S}=\dfrac{10^3}{10^{-2}\pi}=\dfrac{10^5}{\pi}$ W.

Από το Νόμο S-B έχουμε $I=\sigma \cdot T^4 \Leftrightarrow T^4=\frac{I}{\sigma}=\frac{10^5}{5,67\cdot 10^{-8}\pi}=\frac{10^{13}}{5,67\cdot\pi}=0,56\cdot 10^{12}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T=0,865\cdot 10^3=865K$. Άρα $T=273+\theta \Leftrightarrow \theta=592\ ^0C$.

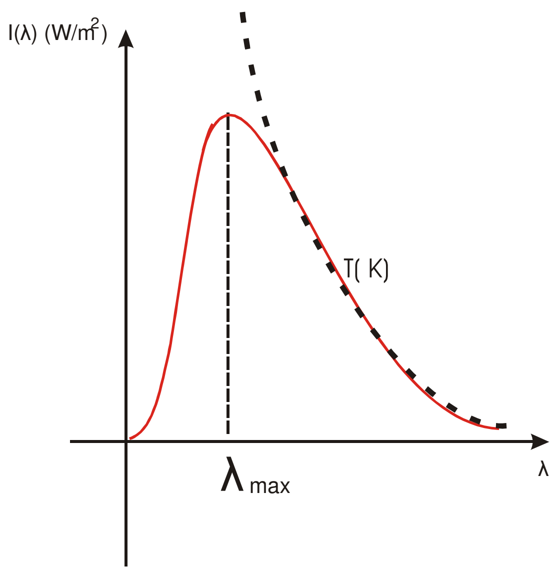
2) Πιο μεγαλειώδης στόχος: Θερμομετρήστε την επιφάνεια του Ήλιου.
Δίνεται ότι το μήκος κύματος λ_{max}, μέγιστης εκπομπής ακτινοβολίας του Ήλιου είναι λ_{max}=600nm (Δαρβίνος).

Από το Νόμο μετατόπισης του **Wien**, έχουμε $\lambda_{max}\cdot T=3\cdot 10^{-3}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow T=\frac{3\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10^{-7}}=0,5\cdot 10^4=5000K$.

3)Ακτινοβολία υποβάθρου (αρχέγονο φως), είναι η ακτινοβολία που εξέπεμψε το ίδιο το Σύμπαν στην υπέρθερμη αρχική του κατάσταση, μετά τη μεγάλη έκρηξη. Αν δεχτούμε ότι το λ_{max} της ακτινοβολίας υποβάθρου στις μέρες μας είναι λ_{max}=1mm, τότε να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία του Σύμπαντος.

Από το Νόμο μετατόπισης του Wien, $\lambda_{max}\cdot T=3\cdot 10^{-3}\Leftrightarrow$ $T=\frac{3\cdot 10^{-3}}{10^{-3}}=3K$.

2α) **Υπόθεση Rayleigh – Jeans :** Πηγή της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος είναι τα ηλεκτρικά φορτία, που υπάρχουν στα τοιχώματα της κοιλότητας. Αυτά συμπεριφέρονται, ως **απλοί αρμονικοί ταλαντωτές** και μπορούν να εκπέμπουν και να απορροφούν ακτινοβολία καθένας με τη **χαρακτηριστική του συχνότητα f** ταλάντωσης. Επειδή λοιπόν στα τοιχώματα της κοιλότητας υπάρχει πολύ μεγάλο πλήθος από τέτοιους ταλαντωτές, με ανάλογο πλήθος συχνοτήτων , ακτινοβολία εμφανίζεται να έχει **συνεχές** φάσμα συχνοτήτων . Όπως **ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής ορισμένης συχνότητας** μπορεί να έχει **οποιαδήποτε ενέργεια** μεταξύ 0 και μιας ανώτατης τιμής $E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$, έτσι και οι ταλαντωτές της κοιλότητας, μπορούσαν να εκπέμπουν ή να απορροφούν ακτινοβολία με οποιαδήποτε ενέργεια μεταξύ 0 και μιας ανώτατης τιμής δηλαδή με **συνεχή** τρόπο.
(Πράγμα που όπως έδειξε ο Planck ήταν λανθασμένο). Όμως υπήρχε μια τεράστια αναντιστοιχία της παραπάνω υπόθεσης με τα πειραματικά δεδομένα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας του μέλανος (πυρακτωμένου) σώματος στα πολύ μικρά μήκη κύματος. Έτσι η καμπύλη που προβλέπονταν από τους Rayleigh – Jeans είναι η διακεκομμένη του σχήματος. Δηλαδή θα έπρεπε ένα πυρακτωμένο (μέλαν) σώμα στη θερμοκρασία που βρίσκεται (όποια είναι αυτή) στα μικρά μήκη κύματος (υπεριώδης-ακτίνες x και ακτίνες γ να εκπέμπει άπειρη ακτινοβολία). Το παράδοξο αυτό που προφανώς δεν ισχύει, ονομάστηκε **υπεριώδης καταστροφή**.



β) **Υπόθεση Max Planck :** Η σύλληψη όμως του Planck, ήταν πως οι αρμονικοί ταλαντωτές που υπέθεσε ο Rayleigh **εκπέμπουν ή απορροφούν ενέργεια Ε σε ορισμένη συχνότητα**, όχι συνεχώς αλλά **ασυνεχώς** (διάκριτα ποσά ενέργειας) (κβαντική υπόθεση), όπου **E=hf**. Έτσι κάθε ταλαντωτής εκπέμπει ή απορροφά ενέργεια στη συχνότητα f μόνο κατά E = N h f όπου το h·f ονομάζεται κβάντουμ ενέργειας (N = 0,1,2,3....). Δηλαδή η ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή στη συχνότητα f είναι κβαντισμένη και στη συχνότητα f που εκπέμπει, μπορεί να πάρει διακριτές τιμές (0 , h·f , 2 h·f , 3 h·f ...)

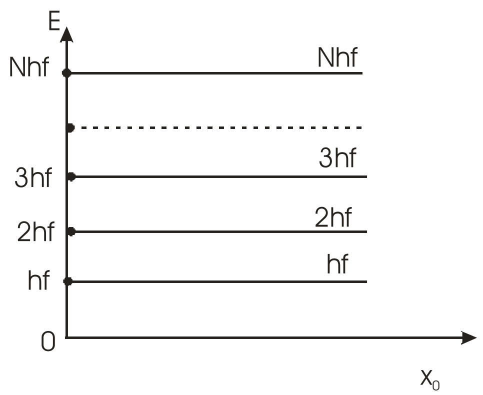
Συνοψίζοντας λοιπόν σε μια ορισμένη συχνότητα f (χαρακτηριστική του κάθε αρμονικού ταλαντωτή- ταλαντούμενου ηλεκτρικού φορτίου), έχουμε:

Α. Σύμφωνα με την **υπόθεση Rayleigh – Jeans :** $0 \leq E_{ολ} \leq \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2$

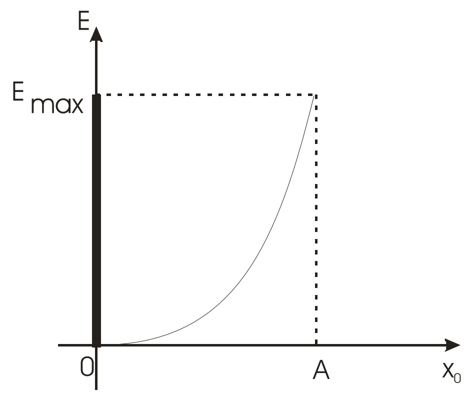
Β . Σύμφωνα με τη **υπόθεση Max Planck :** $0 \leq E_{ολ} \leq Nhf$ **(N=0,1,2,…)**

Για κάποιον άλλο ταλαντωτή σε μια άλλη συχνότητα f_1 που είναι η συχνότητα ταλάντωσής του, θα ισχύει $0 \leq E_{ολ} \leq Nhf_1$.

Παρόλο, που κάθε ταλαντωτής της κοιλότητας εκπέμπει ή απορροφά ακτινοβολία σε **ορισμένη συχνότητα**, το φάσμα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας του μέλανος σώματος είναι **συνεχές**, λόγω του **πολύ μεγάλου πλήθους των ταλαντωτών**.



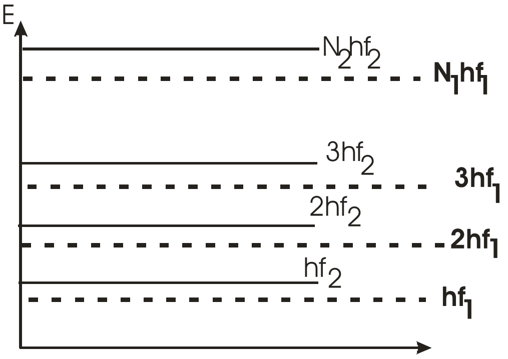
Κβαντική θεώρηση
για την ενέργεια κάθε ταλαντωτή



Κλασική θεώρηση

Προσέξτε ότι στην κβαντική θεώρηση, έχουμε **διάκριτες** ενέργειες,
0, hf, 2hf, 3hf…..Nhf, ενώ στην κλασσική θεώρηση έχουμε ένα **συνεχές** φάσμα ενεργειών από 0 έως E_{max}.

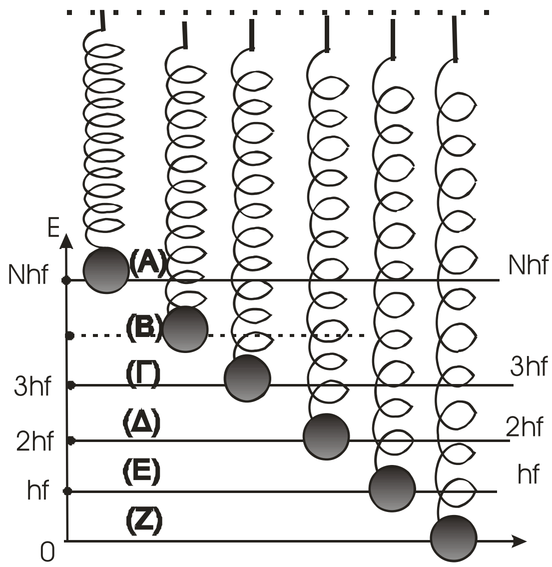
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε δυο ταλαντωτές με κβάντα ενέργειας το hf_1 και το hf_2



αντίστοιχα. Θεωρείστε ότι υπάρχει ένα τεράστιο πλήθος τέτοιων ταλαντωτών (και όχι μόνο δυο) που ο καθένας εκπέμπει στη δική του συχνότητα ($f_1, f_2, f_3 \ldots f_\nu$ $\nu \rightarrow \infty$). Ο ένας ταλαντωτής εκπέμπει ενέργεια :0, hf_1, $2hf_1$, $\ldots N_1hf_1$ και ο άλλος εκπέμπει ενέργεια: 0, hf_2, $2hf_2$, $\ldots N_2hf_2$. *(Το οριζόντιο μήκος των γραμμών δεν έχει κάποια φυσική σημασία).* Το πλήθος των φωτονίων είναι διαφορετικό στην κάθε συχνότητα $N_1 \neq N_2$.

Σε κάθε θερμοκρασία όμως υπάρχει μια συχνότητα f, άρα και ένα μήκος κύματος λ_{max}, για την οποία έχουμε ένα κατάλληλο πλήθος φωτονίων, όπου έχουμε τη μέγιστη εκπεμπόμενη ενέργεια $E_{ολ}$ με $E_{ολ}=Nhf=Nh\dfrac{c}{\lambda_{max}}=E_{max}$. (Το γινόμενο Nf γίνεται μέγιστο). Τότε όμως θα έχουμε και μια μέγιστη εκπεμπόμενη ισχύ από το πυρακτωμένο σώμα $P_{max}=\dfrac{E_{max}}{\Delta t}$, με μέγιστη ένταση $I_{max}=\dfrac{P_{max}}{\Delta A}$, που αντιστοιχεί στο μέγιστο της καμπύλης του Planck ($\lambda_{max} \cdot T=3 \cdot 10^{-3}$).

Παρατηρείστε ακόμη πως καθώς ο ταλαντωτής μας (άτομο της κοιλότητας) που ταλαντώνεται για να μεταβεί π.χ από τη θέση $Γ \rightarrow Ζ$, θα περάσει πρώτα από τις ενδιάμεσες ενεργειακές καταστάσεις και σε κάθε μετάβαση από $Γ \rightarrow Δ$, $Δ \rightarrow Ε$, $Ε \rightarrow Ζ$ θα εκπέμπεται ακτινοβολία με E=hf. Ενώ είναι απίθανο να μεταβεί απευθείας από το $Γ \rightarrow Ζ$ εκπέμποντας ένα φωτόνιο ενέργειας E=3hf χωρίς προηγουμένως να περάσει από τις ενδιάμεσες ενεργειακές καταστάσεις. Έτσι για τη μετάβαση $Γ \rightarrow Ζ$ θα εκπεμφθούν N=3φωτόνια ενέργειας E=hf το καθένα.



Παραδείγματα

1) Η θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου είναι Τ= 6000 Κ
Α) τότε το μήκος κύματος της μέγιστης έντασης είναι
α) λ_m = 480 nm
β) λ_m = 600 nm
γ) λ_m = 100 nm
δ) λ_m = 1600 nm.

Απάντηση:

Ισχύει : Wien $\lambda_m \,.\, T = 2{,}9 \,.\, 10^{-3} \Rightarrow \lambda_m = \dfrac{2{,}9.10^{-3}}{6.10^{3}} = 0{,}48 \,.\, 10^{-6} = 480$ nm.

Β) Η ολική ακτινοβολούμενη ισχύς / μονάδα επιφάνειας (ένταση της ακτινοβολίας), είναι
α) $I = 7{,}25.10^{7}$ W/m^2
β) $I = 1296.\ 10^{12}$ W/m^2
γ) $I = 7{,}25.\ 10^{-7}$ W/m^2
δ) $I = 1296.\ 10^{12}$ W/m^2 k^4 .

Απάντηση:

Ισχύει : Stefan – Boltzmann
$I = \sigma\cdot T^4 \Rightarrow I = 5{,}6 \,.\, 10^{-8} \,.\, (6 \,.\, 10^3)^4 \Rightarrow I = 7257 \,.\, 10^4 = 7{,}25 \,.\, 10^7$ W/m^2 .

2) Αν η χαρακτηριστική ακτινοβολία ενός μέλανος σώματος (ιδανικού ακτινοβολητή) έχει μέγιστο σε μήκος κύματος λ_m = 290 nm τότε
Α) Η θερμοκρασία του μένος σώματος είναι
α) Τ = 100 Κ
β) $T = 10^4$ K
γ) Τ = 2,9 Κ
δ) $T = 8{,}41 \,.\, 10^{-10}$ K.

Απάντηση:

$\lambda_m \,.\, T = σταθ = 2{,}9 \,.\, 10^{-3} \Rightarrow T = \dfrac{2{,}9.10^{-3}}{2{,}9.10^{-7}} \Rightarrow T = 10^4$ K.

Β) Και η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς / μονάδα επιφάνειας του μέλανος σώματος είναι
α) $I = 5{,}6 \,.\, 10^{8}$ W/m^2
β) $I = 5{,}6 \,.\, 10^{-8}$ W/m^2
γ) $I = 5{,}6$ W/m^2
δ) $I = 5{,}6 \,.\, 10^{-4}$ W/m^2

Απάντηση:

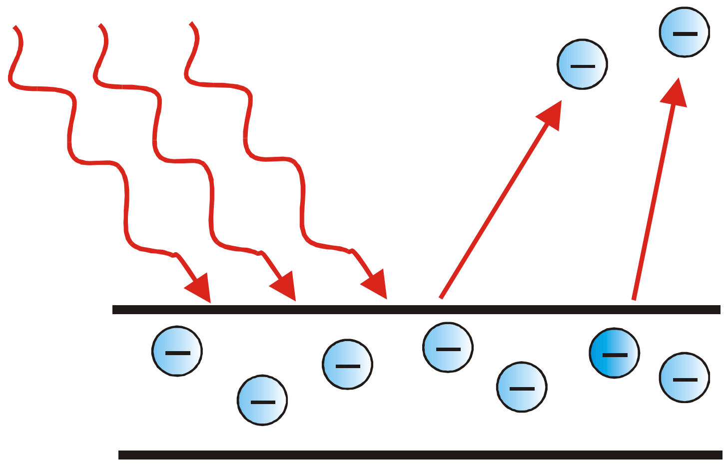
$I = \sigma \,.\, T^4 = 5{,}6 \,.\, 10^{-8} \,.\, 10^{16} \Rightarrow I = 5{,}6 \,.\, 10^{8}$ W/m^2 .

Γενικά $\Delta x \, \Delta \rho > h$

$K = \frac{\rho^2}{2m} \Rightarrow e\,V = \frac{\rho^2}{2m} \Rightarrow \rho = \sqrt{2meV}$ άρα $\lambda = \frac{h}{\rho} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$.

§7.3 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

✓ Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο, από μια μεταλλική επιφάνεια, ελευθερώνονται ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν πάνω της προσπίπτει φως.



✓ Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο αναφέρεται στη **σωματιδιακή φύση** του φωτός.
Το φως, ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα, μεταφέρει ενέργεια. Η κλασική θεωρία όμως αδυνατούσε να ερμηνεύσει το γεγονός, ότι η εξαγωγή των ηλεκτρονίων από το μέταλλο γίνεται **ακαριαία** καθώς και το ότι η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται αυτά από την κάθοδο, εξαρτάται **μόνο από τη συχνότητα** της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και όχι από την συνολική ενέργεια (άρα από την ένταση της ακτινοβολίας), που μεταφέρει η φωτεινή δέσμη που προσπίπτει στο μέταλλο.

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού η μεταφορά ενέργειας γίνεται με τη δράση του ηλεκτρικού πεδίου στο χρόνο. Έτσι ακόμη και μικρή να είναι η ενέργεια άρα και η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (άρα για οποιαδήποτε συχνότητα), μετά από ικανό χρόνο (συνήθως της τάξης του 1s) τα e^- θα αποκτήσουν ικανή κινητική ενέργεια ώστε να αποσπαστούν από το μέταλλο. Άρα για την κλασική θεωρία η συχνότητα f της ακτινοβολίας δε φαίνεται να παίζει κάποιο ουσιώδη ρόλο. Όμως δε γίνεται έτσι!

Σύμφωνα με τον Einstein, κάθε φωτόνιο της δέσμης που προσπίπτει και φωτίζει την κάθοδο μεταδίδει **όλη του** την ενέργεια hf σε **ένα μόνο** από τα ηλεκτρόνια του μετάλλου. Αν η ενέργεια hf του φωτονίου είναι μικρότερη από το έργο εξαγωγής W, το ηλεκτρόνιο δε μπορεί να εγκαταλείψει το μέταλλο. Κάτι τέτοιο γίνεται μόνο αν η ενέργεια hf είναι μεγαλύτερη ή ίση με το έργο εξαγωγής $\mathbf{W_{εξ}}$. Έτσι στην πραγματικότητα μπορεί η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων να μην εξαρτάται από την συνολική ενέργεια της ακτινοβολίας αλλά εξαρτάται από το κβάντο ενέργειας **E= hf**.

✓ Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο παρατηρείται όταν πάνω σε μεταλλική κάθοδο, (π.χ με επίστρωση από ένα αλκαλιμέταλλο όπως K ή Cs) προσπέσει μονοχρωματικό φως του οποίου η συχνότητα είναι μεγαλύτερη από μια ελάχιστη τιμή που ονομάζεται σ υ χ ν ό τ η τ α κ α τ ω φ λ ί ο υ ($f_{ορ}$) ή κατώφλι συχνοτήτων για εξαγωγή e^- και δημιουργία φωτοηλεκτρικού ρεύματος ανεξάρτητη της έντασης της ακτινοβολίας. Η ύπαρξη κατωφλίου συχνότητας ήταν κάτι το **ανεξήγητο** στην κλασική φυσική.

Άρα ισχύει ο εμπειρικός Νόμος: $\mathbf{f \geq f_{o\rho}}$

Για να παρατηρήσουμε λοιπόν το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δε μας ενδιαφέρει η ένταση I της ακτινοβολίας αλλά **μόνο η συχνότητά της.**

✓ Για να συμβεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο το e^- του ατόμου θα πρέπει **να είναι συνδεδεμένο και όχι ελεύθερο** έτσι ώστε να διατηρείται και η Α.Δ.Ε και η Α.Δ.Ο.

Η **ελάχιστη ενέργεια** που πρέπει να προσφέρουμε σε ένα συνδεδεμένο e^-, ώστε να αποσπαστεί από το μέταλλο ονομάζεται **έργο εξαγωγής $W_{\varepsilon\xi}$**. (Για τα αέρια είναι η ενέργεια ιοντισμού τους $E_{\iota o\nu}$).

Δεδομένου ότι η ενέργεια ενός φωτονίου είναι hf θα πρέπει τελικά για να πραγματοποιηθεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο να ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{hf > W_{\varepsilon\xi}.}$$

Μάλιστα για $hf=W_{\varepsilon\xi}$ η συχνότητα f είναι ίση με την οριακή συχνότητα $f_{o\rho}$, άρα ισχύει:

$$\mathbf{f_{o\rho} = \frac{W_{\varepsilon\xi}}{h}}$$

Η ποικιλία τιμών στις συχνότητες κατωφλίου οφείλεται στις διαφορετικές τιμές του έργου εξαγωγής στα διαφορετικά μέταλλα.

Σχόλιο:
Αν το ηλεκτρόνιο είναι ελεύθερο τότε από την Α.Δ.Ε για το προσπίπτων φωτόνιο και το ελεύθερο e^- έχουμε

$$E_{\pi\rho} = E_{\mu\varepsilon\tau} \Leftrightarrow$$

$$hf_1 + mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Leftrightarrow h\frac{c}{\lambda_1} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

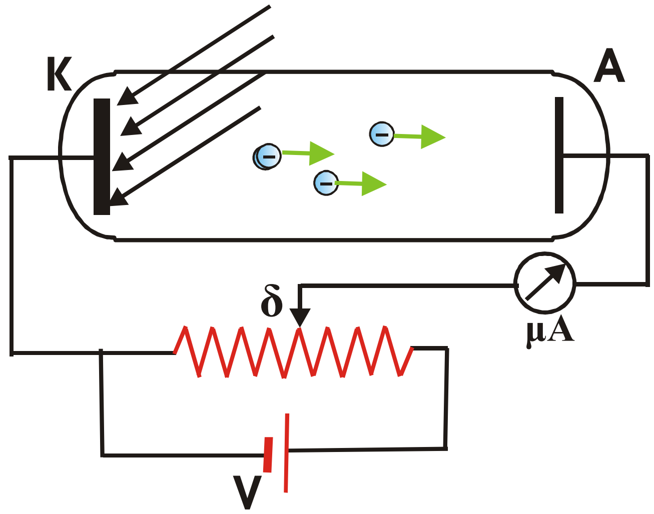
Ακόμη από την Α.Δ.Ο προκύπτει:

$$\vec{p}_{\pi\rho} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau} \Leftrightarrow p_{\varphi} = p_{\eta\lambda} \Leftrightarrow \frac{h}{\lambda_1} = m\upsilon$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για ελεύθερο e^- τα αποτελέσματα έρχονται σε αντίθεση.

Το λάθος έγινε, στο ότι θεωρήσαμε ελεύθερο το ηλεκτρόνιο και όχι δεσμευμένο, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να εφαρμόσουμε την διατήρηση της ορμής, αφού ορμή θα αποκτήσει και το άτομο, με το οποίο συνδεόταν.
Επίσης και η ταχύτητα εξόδου, που υπολογίσαμε με εφαρμογή της ΑΔΕ, δεν είναι η πραγματική, αφού δεν λάβαμε υπόψη το έργο εξαγωγής.

Αν πραγματοποιήσουμε την πειραματική διάταξη του σχήματος:



Τότε για **$f<f_0$** το **φωτορεύμα** των ηλεκτρονίων μεταξύ της καθόδου Κ και της ανόδου Α είναι **ίσο με το μηδέν**. Ακόμη για $f=f_0$ ίσα- ίσα που εξέρχονται από το μέταλλο φωτοηλεκτρόνια με ταχύτητα μηδέν, που επιταχύνονται από την τάση V και έχουμε φωτορεύμα.

✓ Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο περιγράφεται με την φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein.

$$\mathbf{K_{max}=\frac{1}{2}\cdot m\,\upsilon_{max}^{2}= h\cdot f-W_{\varepsilon\xi}.}$$

Από την παραπάνω εξίσωση υπολογίζεται η κινητική ενέργεια K_{max} με την οποία ένα ηλεκτρόνιο της καθόδου εγκαταλείπει το μέταλλο. Δηλαδή η K_{max} είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων **τη στιγμή** που εξέρχονται από το μέταλλο.

Ακόμη από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein προκύπτει για $K_{max} = 0$, ότι $h\cdot f= W_{\varepsilon\xi} \Rightarrow f = \frac{W_{\varepsilon\xi}}{h}$ άρα $f_{op} = \frac{W_{\varepsilon\xi}}{h}$, όπως είπαμε.
Έτσι παρατηρούμε ότι η K_{max} δεν εξαρτάται από την ένταση I της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Επίσης αν $K_{max}=0$ και η εφαρμοζόμενη τάση είναι μηδέν V=0, τότε και το φωτοηλεκτρικό ρεύμα i είναι μηδέν (i=0). Όμως αν $K_{max}=0$ και η εφαρμοζόμενη τάση είναι διάφορη του μηδενός $V\neq0$, τότε όπως προκύπτει από το Θ.Μ.Κ.Ε:
$K-K_{max}=e\cdot V \Leftrightarrow K=e\cdot V$, άρα τα e^- φτάνουν στην άνοδο με μια ταχύτητα $\upsilon\neq0$, άρα έχουμε φωτορεύμα ($i\neq0$).

Παρατηρούμε ότι :
α) Η συχνότητα κατωφλίου εξαρτάται **μόνο** από το υλικό της ανόδου , ($W_{\varepsilon\xi}$), ενώ είναι ανεξάρτητη από την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας .
Για τα περισσότερα μέταλλα βρίσκεται στην περιοχή του υπεριώδους και μάλιστα για λ μεταξύ 200 και 300 nm ενώ για το Na και τα οξείδια του Cs βρίσκεται στο ορατό φάσμα 400–700 nm .

β) Όταν η συχνότητα της ΗΛΜ ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα κατωφλίου ($f>f_{ορ}$), τότε εκπέμπονται ηλεκτρόνια από την κάθοδο με αρκετά μεγάλες ταχύτητες ($K_{max}\neq0$) και οπότε ακόμη και χωρίς τάση V στο εξωτερικό κύκλωμα (V=0), έχουμε φωτορεύμα ($i\neq0$). Επίσης ακόμη και όταν η πολικότητα V αντιστραφεί, υπάρχει ρεύμα e^- μέχρι που η αντίστροφη τάση V να γίνει ίση με την τάση (δυναμικό) αποκοπής $V = V_α$. Τότε σταματά εντελώς η ροή ηλεκτρονίων άρα και τα πιο ενεργητικά e^- ακινητοποιούνται και το φωτορεύμα γίνεται μηδέν (i=0). Δηλαδή η ροή e^- σταματά όταν $e\cdot V_α \geq K_{max}$ δηλαδή για $e\cdot V_α \geq K_{max}$, δεν παρατηρείται φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Όπως προκύπτει από το Θ.Μ.Κ.Ε:
$K-K_{max}= -e\cdot V$ και για K=0 έχουμε $K_{max}= e\cdot V_α$, άρα τα e^- δε φτάνουν στην άνοδο οπότε δεν έχουμε φωτορεύμα (i=0). (K) είναι η κινητική ενέργεια των e^-, όταν φτάνουν στην άνοδο.

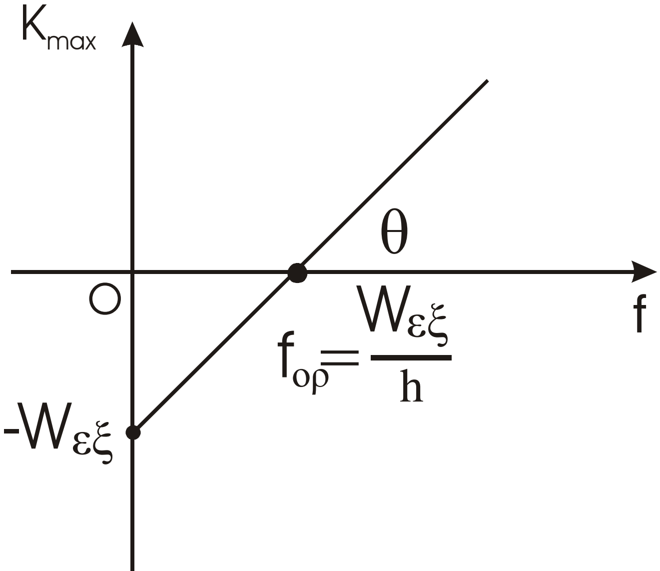
Η K_{max} μετριέται εύκολα αν εφαρμοστεί μια ανασχετική τάση ή δυναμικό $\mathbf{V_α}$, που ονομάζεται **τάση αποκοπής**.

Για, $\mathbf{V = V_α}$ **μόλις που δεν παρατηρείται φωτορεύμα** και

$$\boxed{\text{για } V = V_α \text{ έχουμε } \mathbf{e\cdot V_α = K_{max}} = \frac{1}{2}\cdot m\,υ^2_{max}.}$$

Για αντίθετη δηλαδή τάση, δηλαδή αν βάλουμε στην άνοδο αρνητική τάση, τα e^- επιβραδύνονται και για $V=V_α$ τα e^- φρενάρουν και φτάνουν στην άνοδο με ταχύτητα υ=0. Οπότε για τάση V ίση με την τάση αποκοπής $V_α$ το **φωτορεύμα είναι και αυτό ίσο με μηδέν**.

Ισχύει $\mathbf{K_{max} = h\cdot f - W_{εξ}}$. Έτσι η αντίστοιχη γραφική παράσταση της K_{max} σε συνάρτηση με την f της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι αυτή του σχήματος:

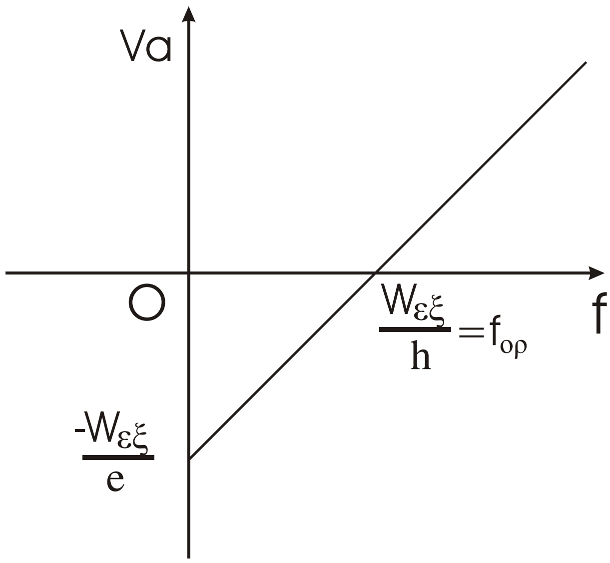


Παρατηρούμε τότε πως για $f=f_{ορ}= \frac{W_{εξ}}{h}$ είναι $K_{max} = 0$, οπότε αυτή είναι και η συχνότητα για την οποία εμφανίζεται το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.
Ακόμη για f = 0 , $K_{max} = - W_{εξ}$.
Παρατηρούμε πως η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων και άρα και η ταχύτητά τους τη στιγμή που εξέρχονται από την κάθοδο δεν εξαρτάται από την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας **αλλά μόνο από τη συχνότητά της** και μάλιστα εξαρτάται **γραμμικά** και αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.
Ακόμη η κλίση της ευθείας είναι ίση με τη σταθερά δράσεως h του Planck. Δηλαδή ισχύει εφθ=h.

Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein για την τάση αποκοπής ισχύει:

$$\mathbf{V_{\alpha} = \frac{h}{e}f - \frac{W_{\varepsilon\xi}}{e}.}$$

Η γραφική παράσταση της τάσης της αποκοπής Vα σε συνάρτηση με τη συχνότητα του φωτός είναι:

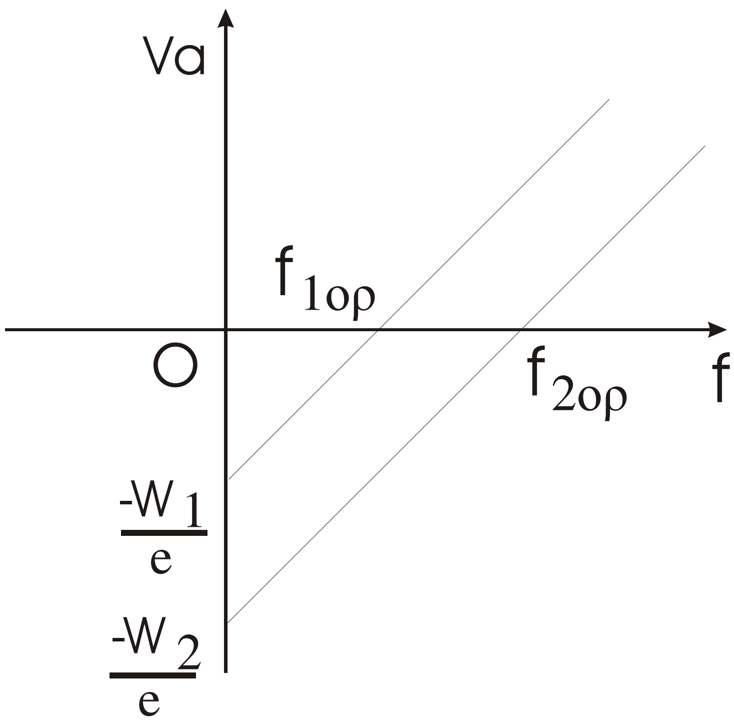


Για $f = 0 \Rightarrow V_{\alpha} = -\frac{W_{\varepsilon\xi}}{e}$

Για $V_{\alpha} = 0 \Rightarrow f = f_{o\rho} = \frac{W_{\varepsilon\xi}}{h}$ και $(e \cdot V_{\alpha} = K_{max} = 0)$.

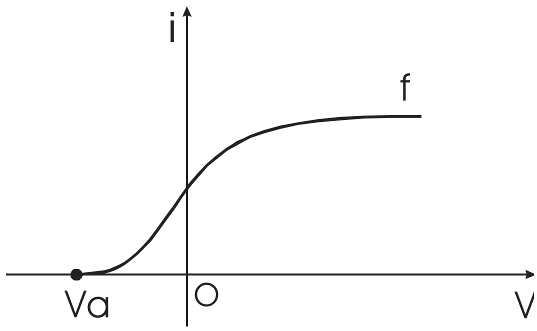
- Παρατηρήστε πως η κλίση της ευθείας είναι ίση με $\frac{h}{e}$, άρα είναι σταθερή .

Έτσι ένα διαφορετικό υλικό καθόδου με διαφορετικό έργο εξαγωγής η ευθεία θα μετακινηθεί προς τα πάνω ή προς τα κάτω αλλά με την ίδια κλίση ($\frac{h}{e}$).



Ισχύει $f_{01}=\frac{W_1}{h}$ και $f_{02}=\frac{W_2}{h}$ τότε για $W_2>W_1$ είναι και $f_{02}> f_{01}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

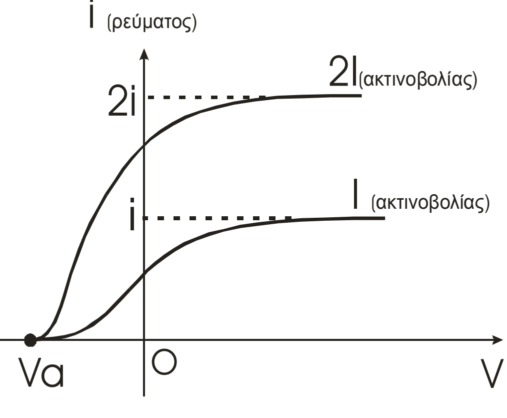
Ένταση (i) φωτορεύματος και τάση (V) ανόδου – καθόδου



1. Η γραφική παράσταση της έντασης (i) του φωτοηλεκτρικού ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση V **για μια σταθερή συχνότητα f** είναι αυτή του σχήματος:
Τα φωτοηλεκτρόνια δεν βγαίνουν από το μέταλλο όλα με ταχύτητες κάθετες σε αυτό, με αποτέλεσμα να μην φτάνουν όλα στην κάθοδο. Με την αύξηση όμως της τάσης όλο και περισσότερα ηλεκτρόνια αναγκάζονται να κινηθούν προς το συλλέκτη (το πεδίο τα ρουφάει προς το συλλέκτη), μέχρι που για κάποια τάση όλα τα ηλεκτρόνια που φεύγουν από το μέταλλο φτάνουν στο συλλέκτη, οπότε από εκεί και πέρα φτάνουμε στο ρεύμα κόρου.
Άρα όσο μεγαλύτερη είναι η τάση τόσο περισσότερο αυξάνεται ο αριθμός των e^- που προσπίπτουν στην άνοδο, οπότε αυξάνεται και ο ρυθμός των e^- που προσπίπτουν στην άνοδο δηλαδή αυξάνεται το $i=\frac{q}{t}=\frac{Ne^-}{t}$ και άρα έχουμε μεγαλύτερη ένταση φωτορεύματος i. Αυτό γίνεται μέχρι το σημείο που όλα τα e^- που παράγονται στην κάθοδο, φτάνουν στην άνοδο, οπότε από εκεί και μετά το φωτορεύμα αποκτά μια σταθερή μέγιστη τιμή.

Παρατηρούμε ακόμη πως και για μηδενική τάση (V=0) ή αρνητική τάση V έχουμε ρεύμα ηλεκτρονίων. Μόλις όμως η ανάστροφη τάση (-V) γίνει ίση με την τάση αποκοπής V_α, όπως είπαμε το φωτορεύμα μηδενίζεται.
Αν η τάση είναι μηδενική δεν υπάρχει κανένας λόγος όλα τα φωτοηλεκτρόνια να φτάσουν στην άνοδο.
Κάποια έχουν ταχύτητες τυχαίες και προσκρούουν στα τοιχώματα, κάποια παραμένουν στο χώρο δημιουργώντας και ένα νέφος αρνητικού φορτίου χώρου, το οποίο υποχρεώνει κάποια αλλά ηλεκτρόνια να επιστρέψουν στην κάθοδο. Αυτό εξηγεί γιατί το φωτορεύμα τότε δεν έχει τη μέγιστή του τιμή.

2. Η ένταση (i) του φωτοηλεκτρικού ρεύματος είναι ευθέως ανάλογη της έντασης (I) της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (του φωτός) . Έτσι:
i) όταν διπλασιάζεται η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας I διπλασιάζεται και η ένταση i ρεύματος κόρου, του φωτοηλεκτρικού ρεύματος. Δηλαδή εκπέμπονται περισσότερα (διπλάσια) ηλεκτρόνια. Ακόμη,
ii) Παρατηρούμε ότι η τάση αποκοπής V_α για την ίδια συχνότητα f είναι

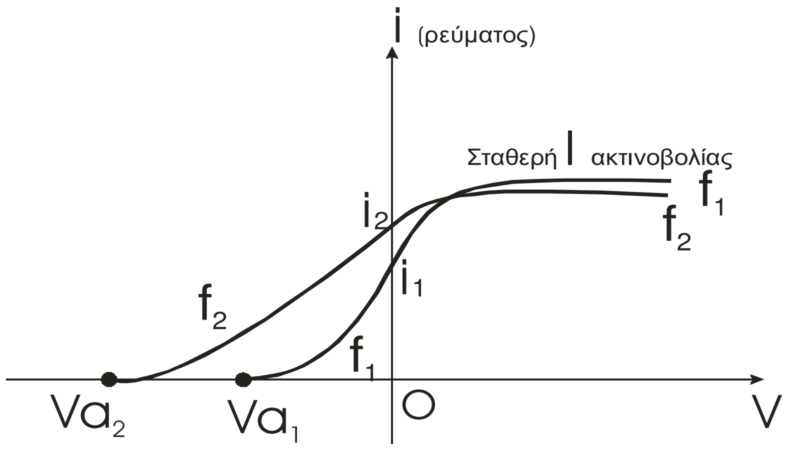


ανεξάρτητη της Ι του προσπίπτοντος φωτός και εξαρτάται μόνο από το υλικό της ανόδου. Άρα για το ίδιο υλικό και για διαφορετικές εντάσεις Ι έχουμε την ίδια τάση αποκοπής V_α, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Αύξηση της φωτεινής έντασης Ι (άρα περισσότερα φωτόνια) για μια συγκεκριμένη συχνότητα f σημαίνει και αύξηση της έντασης $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου της ακτινοβολίας. Όμως ισχυρότερο ηλεκτρικό πεδίο σημαίνει και μεγαλύτερη ηλεκτρική δύναμη $\vec{F} = q\vec{E}$ στα e^- του μετάλλου της καθόδου άρα αυτά αποσπώνται ευκολότερα και άρα αυξάνεται και ο ρυθμός εξαγωγής τους.
Σε κάθε περίπτωση έχουμε περισσότερα φωτοηλεκτρόνια/s και άρα έχουμε αύξηση του φωτορεύματος. Αν ορίσουμε την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας ως τον ***αριθμό φωτονίων*** *ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας,* τότε για διπλάσια ένταση ακτινοβολίας έχουμε διπλάσιο πλήθος φωτονίων άρα και διπλάσιο αριθμό εξερχόμενων από την κάθοδο e^-. Όταν τελικά, όλα αυτά τα e^- φτάσουν στην άνοδο (ρεύμα κόρου), θα έχουμε και διπλάσια μέγιστη ένταση φωτορεύματος.

Προσοχή όμως η μέγιστη κινητική ενέργεια των εξερχόμενων από το μέταλλο φωτοηλεκτρονίων εξαρτάται μόνο από τη συχνότητα ($K_{max}=hf-W_{\varepsilon\xi}$).

Σχόλιο:
Σύμφωνα με την κλασική θεωρία η μεταβίβαση της ενέργειας από το ηλεκτρομαγνητικό κύμα στα e^- του μετάλλου γίνεται αναγκαστικά σε κάποιο χρονικό διάστημα δηλαδή γίνεται βαθμιαία. Έτσι θα έπρεπε να μεσολαβεί κάποιο χρονικό διάστημα από την πρόσπτωση της ακτινοβολίας μέχρι την εμφάνιση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος. Με μια απλή εκτίμηση η χρονοκαθυστέρηση θα έπρεπε να είναι της τάξης του 1s. Όμως η πειραματική τιμή αυτού του χρόνου αν δεν είναι μηδέν είναι της τάξης του $1ns=10^{-9}s$ και μικρότερος. Δηλαδή το φωτορεύμα εμφανίζεται σχεδόν **ταυτόχρονα** με την πρόσπτωση της φωτεινής δέσμης στην κάθοδο.

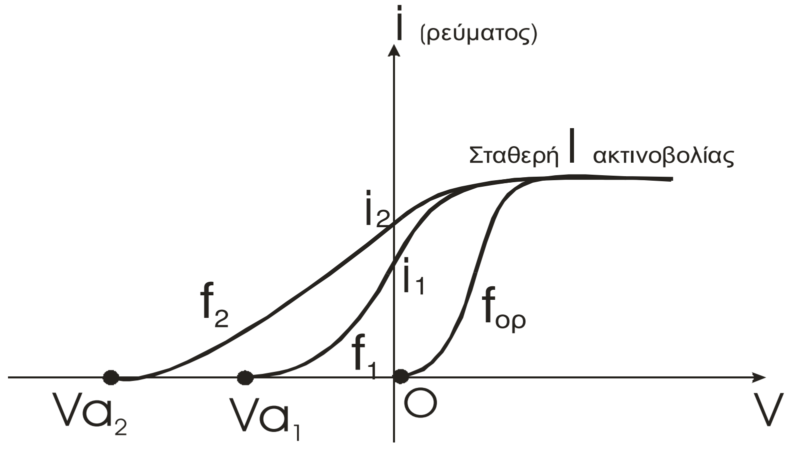
3.Είπαμε για την τάση αποκοπής V_α ότι:
$e\cdot V_\alpha = K_{max} = h\cdot f - W_{\varepsilon\xi} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow V_\alpha = \frac{h}{e}\cdot f - \frac{W_{\varepsilon\xi}}{e}$ ($V_\alpha = |V_\alpha|$).
Άρα η τάση αποκοπής κατά απόλυτη τιμή εξαρτάται (αυξάνεται γραμμικά) από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (f) και άρα από το κβάντο ενέργειας ($E = h\cdot f$) της προσπίπτουσας ακτινοβολίας καθώς και από το υλικό της ανόδου ($W_{\varepsilon\xi}$). Έτσι για **σταθερή ένταση ακτινοβολίας** για το **ίδιο υλικό** και για **δυο συχνότητες f_1 και f_2** με $f_2 > f_1$ έχουμε $|V_{\alpha2}| > |V_{\alpha1}|$ π.χ αν $V\alpha_1 = -10$ V τότε $V\alpha_2 = -12$ V, η γραφική παράσταση i(V) είναι αυτή του σχήματος.



Δηλαδή καθώς η συχνότητα f αυξάνεται, αυξάνεται γραμμικά και το μέτρο της τάσης αποκοπής και άρα και η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρικών αφού $e \cdot V_\alpha = K_{max} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{max}^2$.

Ακόμα για σταθερή ένταση προσπίπτουσας ακτινοβολίας (Ι) ισχύει: $I = \frac{E}{dS \cdot dt} = \frac{Nhf}{dS \cdot dt} \Leftrightarrow \frac{N}{dt} = \frac{I \cdot dS}{hf}$. Δηλαδή παρατηρούμε πως καθώς η συχνότητα f της ακτινοβολίας αυξάνεται ο αριθμός των φωτονίων ανά μονάδα χρόνου $\frac{N}{dt}$, που πέφτουν στην κάθοδο ελαττώνεται. Οπότε για συχνότητα $f_2 > f_1$ (Ι=σταθ.) και για την ίδια απορρόφηση ακτινοβολίας, λιγότερα φωτόνια πέφτουν στην κάθοδο άρα και λιγότερα ηλεκτρόνια εκπέμπονται από αυτή, αν δεχτούμε ότι το κάθε φωτόνιο έχει συχνότητα μεγαλύτερη από την οριακή και ότι κάθε φωτόνιο δίνει όλη του την ενέργεια αμέσως σε ένα ηλεκτρόνιο. Γνωρίζουμε όμως από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση πως καθώς αυξάνεται η συχνότητα f της προσπίπτουσας ακτινοβολίας αυξάνεται γραμμικά και η μέγιστη κινητική ενέργεια K_{max} των εξερχόμενων ηλεκτρονίων. Όμως για μεγαλύτερη K_{max} τα εκπεμπόμενα από την κάθοδο ηλεκτρόνια είναι πιο ενεργητικά και έτσι περισσότερα ηλεκτρόνια φτάνουν στην άνοδο. Έτσι για V=0, έχουμε μεγαλύτερο φωτορεύμα i για τη μεγαλύτερη συχνότητα f_2 δηλαδή $i_2 > i_1$. Αυξάνοντας στη συνέχεια την τάση καθόδου – ανόδου V, τότε από μια τάση V και μετά όλα τα ηλεκτρόνια φτάνουν με την ίδια ταχύτητα υ στην άνοδο (το όριο είναι η ταχύτητα του φωτός c). Όμως επειδή για τις μικρότερες συχνότητες έχουμε περισσότερα φωτόνια άρα και ηλεκτρόνια τελικά για τη μικρότερη συχνότητα f_1 θα έχουμε μεγαλύτερο φωτορεύμα δηλαδή τελικά $i_1 > i_2$. Επίσης παρατηρούμε πως υπάρχει μια τάση επιτάχυνσης για την οποία τα δυο φωτορεύματα (i_1 και i_2 για τις δυο συχνότητες γίνονται ίσα).

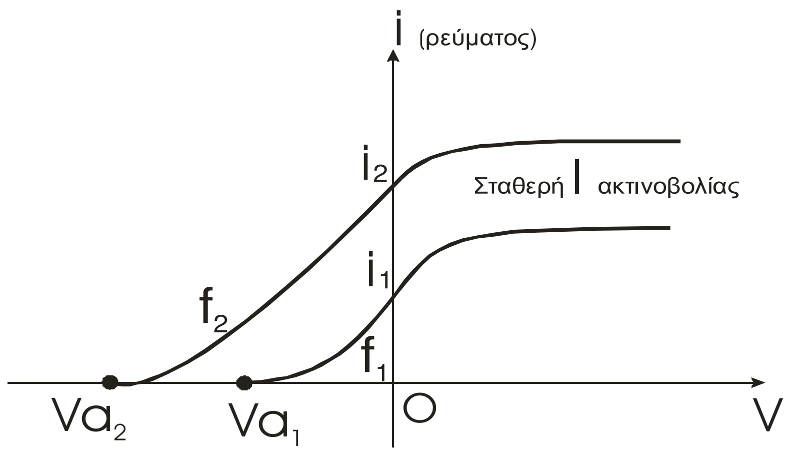
Βέβαια αν θεωρήσουμε πως όταν αναφερόμαστε σε ***σταθερή ένταση*** *μιλάμε για* ***σταθερό αριθμό φωτονίων*** *ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας, τότε επειδή η διαδικασία στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι διαδικασία ενός βήματος έχουμε ή όλα ή τίποτα. Αν λοιπόν τα φωτόνια της δέσμης έχουν f>fορ τότε το καθένα από αυτά δίνει όλη του την ενέργεια σε ένα e. Για* ***σταθερή ένταση Ι ακτινοβολίας****, το πλήθος των φωτονίων ανά μονάδα επιφάνειας και χρόνου είναι το ίδιο. Τότε και το μέγιστο πλήθος των φωτοηλεκτρονίων είναι το ίδιο ανεξάρτητα από τη συχνότητα της ακτινοβολίας. Αυξάνοντας την f, το έργο εξαγωγής Wεξ=φ δεν αλλάζει αλλά αυξάνεται η* K_{max}. *Όμως για μεγαλύτερη* K_{max} *περισσότερα ηλεκτρόνια φτάνουν στην άνοδο για μηδενική τάση V, οπότε για V=0 έχουμε μεγαλύτερο φωτορεύμα στη συχνότητα* f_2 ($f_2 > f_1$ *άρα και* $i_2 > i_1$)*. Τελικά αυξάνοντας την τάση V για το ίδιο πλήθος* e^- *το ρεύμα αποκτά*



την ίδια σταθερή μέγιστη τιμή (ρεύμα κόρου) και στις δυο συχνότητες f_1 και f_2, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Ακόμη παρατηρείστε πως επειδή για $f=f_{op}$, είναι $K_{max}=0$ είναι και $V_\alpha=0$. Δηλαδή σε αυτή την περίπτωση τα φωτοηλεκτρόνια ίσα – ίσα που εξέρχονται από το μέταλλο οπότε δεν έχουμε φωτορεύμα και άρα ακόμη και για τάση 0V αυτό είναι μηδέν. Δηλαδή δε χρειαζόμαστε κάποια τάση αποκοπής. Στη συνέχεια και καθώς αυξάνουμε την ορθή τάση V, αυτά επιταχύνονται, το φωτορεύμα αυξάνεται μέχρι μια μέγιστη τιμή, οπότε τότε όλα τα φωτοηλεκτρόνια φτάνουν «ψαρεύονται» από την άνοδο.

Σχόλιο: *Τα διαγράμματα που σχεδιάσαμε παραπάνω ισχύουν στην περίπτωση που όλα τα φωτόνια της δέσμης ελευθερώνουν ηλεκτρόνια.*
Στην πραγματικότητα όμως μόνο ένα ποσοστό αυτών των φωτονίων ελευθερώνουν ηλεκτρόνια από το μέταλλο.

Έτσι για μεγαλύτερη συχνότητα φωτονίων επειδή η ενέργεια των φωτονίων είναι μεγαλύτερη τότε μεγαλύτερο ποσοστό αυτών των φωτονίων ελευθερώνουν ηλεκτρόνια, γιατί ελευθερώνονται και ηλεκτρόνια από εσωτερικότερες στάθμες των ατόμων του μετάλλου. Έτσι αυξάνεται και το πλήθος των φωτοηλεκτρονίων άρα τελικά αυξάνεται και το ρεύμα κόρου (μέγιστο φωτορεύμα).



Δηλαδή στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, ο μέγιστος αριθμός ηλεκτρονίων που μπορούν να εκτοξευθούν από ένα μεταλλικό υλικό εξαρτάται από τη συχνότητα της ακτινοβολίας.
Όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας αυξάνει, τα φωτόνια που φέρουν αυτήν τη συχνότητα έχουν μεγαλύτερη ενέργεια και μπορούν να ελευθερώσουν περισσότερα ηλεκτρόνια από το μέταλλο. Επομένως, όταν η συχνότητα αυξάνει ($f_2>f_1$), έχουμε μεγαλύτερο ρεύμα κόρου, δηλαδή μεγαλύτερο αριθμό ηλεκτρονίων που εκτοξεύονται από το μέταλλο, για την ίδια ένταση ακτινοβολίας.
Αυτό συμβαίνει επειδή, με την αύξηση της συχνότητας της ακτινοβολίας, τα φωτόνια φέρουν περισσότερη ενέργεια και μπορούν να ελευθερώσουν ηλεκτρόνια που απαιτούν περισσότερη ενέργεια για να απελευθερωθούν από το υλικό του μετάλλου.
Επομένως, μεγαλύτερη συχνότητα ακτινοβολίας οδηγεί σε μεγαλύτερο ρεύμα κόρου για την ίδια ένταση. Οπότε τότε θα είχαμε το παραπάνω διάγραμμα.

Η πιθανότητα να λάβει χώρα το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι ανάλογη της πέμπτης δύναμης του Z του υλικού ($\propto Z^5$).

Παραδείγματα

3)Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ένα ορισμένο μέταλλο και για φως κάποιας συχνότητας έχει δυναμικό αποκοπής .
$|Va|$= 1 Volt . Τότε η μέγιστη κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων είναι .
α) 2 eV
β) 1 eV
γ) 1,6 eV
δ) 10^{-19} J

Απάντηση:

$K_{max} = e \cdot Va = 1$ eV $= 1{,}6\cdot10^{-19}$ J .

4) Για ένα ορισμένο μέταλλο που χρησιμοποιείται στην φωτοκάθοδο η τάση αποκοπής για προσπίπτουσα ακτινοβολία με μήκος κύματος λ = 300n m είναι Vα = 3 V
Τότε το έργο εξαγωγής του μετάλλου είναι:
α) $W_{εξ} = 9 \,.\, 10^{-7}$ J
β) $W_{εξ} =$ 1,6 e V
γ) $W_{εξ} = 1{,}83\cdot10^{-19}$ J
δ) $W_{εξ} = 4{,}8\cdot10^{-19}$ J.

Απάντηση:

Ισχύει : $Vα = \frac{h}{e} f - \frac{W_{εξ}}{e} \Rightarrow 3 \,.\, 1{,}6 \,.\, 10^{-19} = 6{,}63 \,.\, 10^{-34} \,.\, 10^{15} - W_{εξ} \Rightarrow$
$W_{εξ} = 6{,}63 \,.\, 10^{-19} - 4{,}8 \,.\, 10^{-19} \Rightarrow W_{εξ} = 1{,}83 \,.\, 10^{-19}$ J.

5)Ένα μέταλλο που χρησιμοποιείται σε πείραμα φωτοηλεκτρικού φαινομένου έχει έργο εξαγωγής $W_{εξ}$ =1eV για συχνότητα προσπίπτοντος φωτός ίση με f = 2,75 . 10^{15} Hz . Τότε αν h = 6,4 . 10^{-34} J s και $m_e = 9 \,.\, 10^{-31}$ Kg η μέγιστη ταχύτητα των φωτοηλεκτρικών είναι
α) $\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot10^6$ m/s
β)6,4 $\cdot10^6$ m/s
γ) 6 $\cdot10^8$ m/s
δ) $\frac{2}{3}\cdot10^6$ m/s.

Απάντηση:

Ισχύει : $K_{max} = h f - W_{εξ} \Rightarrow K_{max} = 6{,}4 \,.\, 10^{-34} \,.\, 2{,}75 \,.\, 10^{15} - 1{,}6 \,.\, 10^{-19} \Rightarrow K_{max} = 16 \,.\, 10^{-19}$ J.

Όμως $K_{max} = \frac{1}{2} m\, υ_{max}^2 \Rightarrow υ_{max}^2 = \frac{2.16.10^{-19}}{9.10^{-31}} \Rightarrow υ_{max}^2 = 2.\frac{16}{9}.10^2 \Rightarrow υ_{max} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \,.\, 10^6$ m/s.

6) Φως μήκος κύματος $\lambda = 300nm$ πέφτει στην επιφάνεια μετάλλου. Αν το δυναμικό αποκοπής είναι $V\alpha = 1$ Volt τότε το μήκος κύματος κατωφλίου(ελάχιστο μήκος κύματος) για να παρατηρηθεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι : ($c = \lambda f \Rightarrow f = \frac{3.10^8}{3.19^{-7}} = 10^{15}$ Hz).

α) $\lambda_{o\rho} = 395$ nm

β) $\lambda_{o\rho} = 300$ nm

γ) $\lambda_{o\rho} = 290$ nm

δ) $\lambda_{o\rho} = 300 \cdot 10^{-7}$ m.

Απάντηση:

Ισχύει $V\alpha = \frac{h}{e} \cdot f - \frac{W_{\varepsilon\xi}}{e} \Rightarrow 1,6 \cdot 10^{-19} = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{15} - W_{\varepsilon\xi} \Rightarrow W_{\varepsilon\xi} = =5,03 \cdot 10^{-19}$J.

Όμως$f_{o\rho} = \frac{W_{\varepsilon\xi}}{h} = \frac{5,03.10^{-19}}{6,63.10^{-34}} = 0,758.10^{15}$Hz, ή $c=\lambda \cdot f \Rightarrow \lambda_{o\rho} = \frac{3.10^8}{0,758.10^{15}} \Rightarrow \Rightarrow \lambda_{o\rho} =3,95.10^{-7}=395$ nm.

7) Αν αυξήσουμε την ένταση μιας μονοχρωματικής ακτινοβολίας που προσπίπτει στην κάθοδο ενός φωτοκυτάρου τότε ο αριθμός τον ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο σε ορισμένο χρόνο

α) μειώνεται

β) αυξάνεται

γ) παραμένει σταθερός

δ) εξαρτάται μόνο από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας.

8) Τα φωτοηλεκτρόνια βγαίνουν με μεγαλύτερη ταχύτητα από την κάθοδο όταν

α) η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας αυξάνεται

β) το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας αυξάνεται

γ) η ένταση της ακτινοβολίας αυξάνεται

δ) αυτή φωτίζεται με κόκκινο φως από ότι όταν φωτίζεται με μπλε.

9) Η συχνότητα κατωφλίου ($f_{o\rho}$),

α) εξαρτάται μόνο από το έργο εξαγωγής του μετάλλου

β)είναι μεγαλύτερη για το Cs με $W_{\varepsilon\xi}$=1,4eV, από ότι για το K, με $W_{\varepsilon\xi}$=2,2eV

γ) εξαρτάται μόνο από την ένταση της ακτινοβολίας

δ) ανήκει υποχρεωτικά στην υπεριώδη περιοχή.

10) Η τάση αποκοπής (V_a),

α) εξαρτάται μόνο από το έργο εξαγωγής του μετάλλου και είναι μεγαλύτερη για το K, με $W_{\varepsilon\xi}$=2,2eV από ότι για το Cs με $W_{\varepsilon\xi}$=1,4eV,

β) είναι μεγαλύτερη για την ακτινοβολία (1), από ότι για την (2) αν $f_2>f_1$,

γ) εξαρτάται μόνο από την ένταση της ακτινοβολίας
δ) εξαρτάται (αυξάνεται γραμμικά) από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

11) Τα ηλεκτρόνια που βγαίνουν από την επιφάνεια ενός μετάλλου που φωτίζεται με μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος 600nm έχουν κινητική ενέργεια 1eV. Τότε τα φωτοηλεκτρόνια που εκπέμπονται από την ίδια επιφάνεια όταν αυτή φωτίζεται με ακτινοβολία μήκους κύματος 300nm, έχουν κινητική ενέργεια:
α) 2eV
β) 0,5eV
γ) 3eV
δ) δεν παρατηρείται το φαινόμενο
Δίνονται: h= 6,4(10-34j(s, c=3(108m/s και 1eV=1,6(10-19J.

Απάντηση:

Ισχύει : $K_1 = h\,\frac{c}{\lambda_1} - W_{\varepsilon\xi}$ και $K_2 = h\,\frac{c}{\lambda_2} - W_{\varepsilon\xi}$.Τότε $K_1\text{-}K_2=h\cdot c\cdot\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}$ και τελικά προκύπτει K_2=3eV.

12) Το μήκος κύματος που πρέπει να έχει μια ΗΛΜ ακτινοβολία ώστε κάθε φωτόνιό της να έχει την ίδια ορμή με ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με ταχύτητα $\upsilon=2{,}2\cdot10^5$m/s είναι :
α) $3\cdot10^{-8}$m
β) $1/3\cdot10^{-8}$m
γ) 333nm
δ) 0,33m
Δίνονται: h= $6{,}6\cdot10^{-34}$j·s, m_e= 9(10-31Kg.

Απάντηση:

Για το μήκος κύματος του φωτονίου της δεσμης ισχύει $\lambda=\frac{h}{p}$ και $p=\frac{h}{\lambda}$. Όμως για την ορμή του ηλεκτρονίου ισχύει p=m·υ. Τότε έχουμε $\frac{h}{\lambda}=$ m·υ ή $\lambda=\frac{h}{mu}=\frac{6{,}6\,10^{-34}}{9\,10^{-31}.2{,}2.10^{5}}$ $=1/3\cdot10^{-8}$m ή 3,33nm.

13) Ο αριθμός των φωτονίων με μήκος κύματος λ=663 nm που πρέπει να προσκρούουν ανά δευτερόλεπτο κάθετα σε μια απόλυτα ανακλαστική επιφάνεια, ώστε να ασκήσουν σ' αυτή δύναμη 2Ν είναι:
α) $5\cdot10^{26}$ φωτόνια/s
β) 10^{27} φωτόνια/s
γ) $2\cdot10^{27}$ φωτόνια/s

δ) $5\cdot10^{23}$ φωτόνια/s.

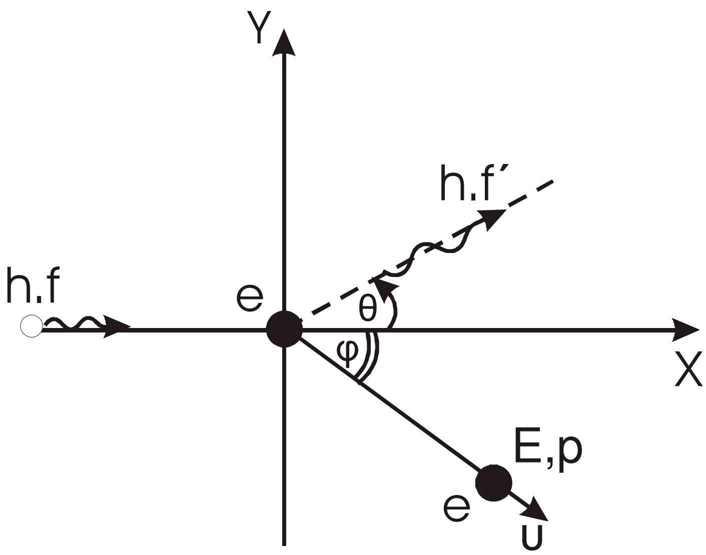
Απάντηση:

$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}$. Όμως για τέλεια ανακλαστική επιφάνεια για κάθε φωτόνιο ισχύει $\Delta p=2p=2\frac{h}{\lambda}$. Τότε για ΔΝ φωτόνια θα έχουμε $\Delta p=\Delta N\frac{2h}{\lambda}$. Τελικά προκύπτει:

$\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{\Delta N}{\Delta t}\frac{2h}{\lambda}$ ή $F=\frac{\Delta N}{\Delta t}\frac{2h}{\lambda}$ ή $\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{F.\lambda}{2h}=\frac{2.663.10^{-9}}{2.6{,}63.10^{-34}}=10^{27}$ φωτόνια/s.

§7.4 Φαινόμενο Compton

Το φαινόμενο Compton , αναφέρεται στη σωματιδιακή φύση του φωτός όπως και το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.
Στο φαινόμενο Compton ένα φωτόνιο των ακτίνων x (ή γ) αλληλεπιδρά μ' ένα **ελεύθερο** ή χαλαρά συνδεδεμένο e^- (π.χ ενός μετάλλου ή γραφίτη) και **σκεδάζεται** (αλλάζει κατεύθυνση), με **μικρότερη** ενέργεια και άρα συχνότητα ή μεγαλύτερο μήκος κύματος. Το υπόλοιπο της ενέργειας του προσπίπτοντας φωτονίου το παίρνει το e^- (ηλεκτρόνιο), το οποίο ανακρούεται. *Στην πραγματικότητα το φωτόνιο απορροφάται από το ηλεκτρόνιο και εκπέμπεται ένα άλλο διαφορετικού μήκους κύματος φωτόνιο. Δηλαδή τα δυο φωτόνια είναι διαφορετικά. Το ένα «εξαφανίζεται» (απορροφάται) και το άλλο γεννιέται. Το προσπίπτων φωτόνιο ονομάζεται και πρωτογενές ενώ το σκεδαζόμενο ονομάζεται δευτερογενές.*



Δηλαδή φανταζόμαστε τη διαδικασία σκέδασης ως μια σύγκρουση δυο σωματιδίων. Του φωτονίου και ενός **ελεύθερου e^-** που είναι αρχικά ακίνητο ή απλώς έχει πολύ μικρότερη κινητική ενέργεια από το προσπίπτον φωτόνιο. Αυτό ακριβώς είναι το φαινόμενο Compton. Με αυτό το **πείραμα κρούσης** (ένα φωτόνιο με ένα e^-), επιβεβαιώνουμε τη σωματιδιακή φύση του φωτονίου (κβάντο φωτός).

Έτσι αν hf είναι η ενέργεια του προσπίπτοντος e^- και hf΄ η ενέργεια του δευτερογενούς φωτονίου μετά την κρούση, τότε ισχύει:

$$\boldsymbol{h\cdot f' < h\cdot f \Rightarrow f' < f \Rightarrow \lambda' > \lambda.}$$

Άρα το δευτερογενές φωτόνιο έχει μεγαλύτερο μήκος κύματος, άρα λέμε πως έχουμε μια **ερυθρή μετατόπιση** (μετατόπιση στο ερυθρό), του μήκους κύματος του φωτονίου.

Στα φωτόνια η ειδική θεωρία της σχετικότητας αποδίδει ορμή ρ που υπολογίζεται ως εξής:
$\mathbf{E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2}$
Επειδή για τα φωτόνια η μάζα ηρεμίας είναι μηδέν θα έχουμε:

$$E = pc \Leftrightarrow h\frac{c}{\lambda} = pc \Leftrightarrow p = \frac{h}{\lambda}.$$

Τελικά από την Α.Δ.Μ.Ε και την Α.Δ.Ο προκύπτει:

$$\mathbf{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}\cdot(1 - \sigma\upsilon\nu\theta).}$$

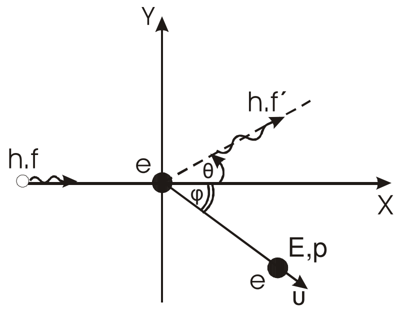
ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η ολική σχετικιστική ενέργεια ενός σωματιδίου είναι $E^2 = (m\,c^2)^2 + (pc)^2$
Για τα άμαζα σωματίδια όπως είναι το φωτόνιο έχουμε $E^2 = (pc)^2 \Rightarrow E = pc$, ενώ ένα ακίνητο σωματίδιο όπως το ηλεκτρόνιο έχει ενέργεια $E = K + mc^2$ ή $E = mc^2$ (K=0).

Έτσι αρχικά το φωτόνιο έχει ενέργεια $E_\varphi = pc = h\dfrac{c}{\lambda} = hf$ ενώ το ακίνητο ηλεκτρόνιο (υ=0), έχει ενέργεια $E_{\eta\lambda} = mc^2$. Μετά τη κρούση και σκέδαση το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχει ενέργεια $E_\varphi' = p'c = hf'$, ενώ το ηλεκτρόνιο έχει ενέργεια $E_{\eta\lambda}' = E$ με $E^2 = E_{\eta\lambda}^{2\,\prime} = (mc^2)^2 + (p_{\eta\lambda}c)^2$ όπου $p_{\eta\lambda} = p = m\upsilon$. Για τις πράξεις την ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την κρούση θα τη συμβολίζουμε **E** και την ορμή του **p.**
Άρα από τη αρχή διατήρησης της ενέργειας
(Α.Δ.Ε):

$$E_\varphi + E_{\eta\lambda} = E_\varphi' + E_{\eta\lambda}' \Leftrightarrow hf + mc^2 = hf' + E \quad (1)$$

Όπου mc^2 είναι η ενέργεια ηρεμίας του ακίνητου ηλεκτρονίου και E η ενέργεια του ανακρούοντος ηλεκτρονίου μετά την κρούση με $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$



Από την αρχή διατήρησης της ορμής **(Α.Δ.Ο)** και δεδομένου ότι για το φωτόνιο ισχύει $E = pc \Leftrightarrow hf = pc \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p = \dfrac{hf}{c}$,

$$\mathbf{Α.Δ.Ο_{(x'x)}:}\ \frac{hf}{c} + 0 = \frac{hf'}{c}\sigma\upsilon\nu\theta + p\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (2)$$

$$\mathbf{Α.Δ.Ο_{(y'y)}:}\ 0 = \frac{hf'}{c}\eta\mu\theta - p\eta\mu\varphi \quad (3)$$

Ισχύει:
$(2) \Leftrightarrow p\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{h}{c}(f - f'\sigma\upsilon\nu\theta)$
$(3) \Leftrightarrow p\eta\mu\varphi = \dfrac{h}{c}f'\eta\mu\theta$. Αν υψώσουμε τις δυο σχέσεις στο τετράγωνο και προσθέσουμε κατά μέλη τότε έχουμε: $p^2(\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi) = \dfrac{h^2}{c^2}[(f - f'\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + f'^2\,\eta\mu^2\theta] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p^2 = \frac{h^2}{c^2}(f^2 + f'^2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2ff'\sigma\upsilon\nu\theta + f'^2\,\eta\mu^2\theta) \Leftrightarrow p^2 = \frac{h^2}{c^2}(f^2 + f'^2 - 2ff'\sigma\upsilon\nu\theta\,) \quad (4)$$

$(1) \Leftrightarrow E = h(f - f') + mc^2 \Leftrightarrow E^2 = h^2(f - f')^2 + m^2c^4 + 2h(f - f')mc^2$ όπου
$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 = m^2c^4 + p^2c^2$. Άρα έχουμε και

$m^2c^4+p^2c^2= h^2(f- f')^2+ m^2c^4+ 2h(f- f')mc^2 \Leftrightarrow p^2c^2= h^2(f- f')^2+ 2h(f- f')mc^2$ τότε και από τη σχέση (4) προκύπτει:
$=h^2(f^2+f'^2-2ff'συνθ)= h^2(f- f')^2+ 2h(f- f')mc^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f^2+f'^2-2ff'συνθ= f^2+f'^2-2ff'+\frac{2mc^2}{h}(f- f') \Leftrightarrow 2ff'(1-συνθ)= \frac{2mc^2}{h}(f- f')$ δεδομένου ότι $f=\frac{c}{\lambda}$ και $f'=\frac{c}{\lambda'}$ έχουμε και:
$2\frac{c^2}{\lambda\lambda'}(1-συνθ)= \frac{2mc^2}{h}c\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda\lambda'} \Leftrightarrow 1-συνθ=\frac{mc}{h}(\lambda'-\lambda) \Leftrightarrow \lambda'-\lambda=\frac{h}{mc}(1-συνθ) \Leftrightarrow$

$$\boxed{\Leftrightarrow \boldsymbol{\Delta\lambda=\frac{h}{mc}(1-συνθ).}}$$

Ακόμη $\Delta\lambda=\lambda_c(1-συνθ)$, όπου το $\lambda_c=\frac{h}{mc}$ με $\lambda_c=\frac{6{,}63\cdot10^{-34}}{9\cdot10^{-31}\cdot3\cdot10^{8}}2{,}42\cdot10^{-12}m=2{,}4\cdot10^{-2}$ A, ονομάζεται μήκος κύματος Compton.
Για να είναι αισθητό το φαινόμενο Compton θα πρέπει το $\Delta\lambda$ να είναι συγκρίσιμο με το λ_c δηλαδή θα πρέπει η προσπίπτουσα ακτινοβολία να έχει μήκος κύματος της τάξης του A^0 και ακόμη μικρότερο π.χ ακτίνες X.

- Αν θέλουμε να υπολογίσουμε **μόνο** την κινητική ενέργεια **K** του ηλεκτρονίου, τότε πρέπει από την ολική του ενέργεια E να αφαιρέσουμε την ενέργεια ηρεμίας του mc^2. Άρα ισχύει $K=E-mc^2$. Από τη σχέση (1) ισχύει $E_\varphi + E_{ηλ}= E_\varphi' + E_{ηλ}' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow hf+ mc^2= hf'+ E \Leftrightarrow hf+ mc^2= hf'+ K+mc^2 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{K= h(f-f')}}$
- Η σχετικιστική ενέργεια ενός σώματος, δίνεται από τη σχέση $E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}=\gamma mc^2=m_{rel}c^2$ με $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ και $m_{rel}=\gamma m$. Έτσι προκύπτει πως $E^2-\frac{\upsilon^2}{c^2}E^2=m^2c^4$. Ακόμη η σχετικιστική ορμή δίνεται από τη σχέση $p=\frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}=$ $=\gamma m\upsilon= m_{rel}\upsilon$. Τότε προκύπτει $p^2=\frac{m^2\upsilon^2}{1-\upsilon^2/c^2} \Leftrightarrow 1-\frac{\upsilon^2}{c^2}=\frac{m^2\upsilon^2}{p^2}$. Άρα
$E^2-\frac{\upsilon^2}{c^2}E^2=m^2c^4 \Leftrightarrow E^2(1-\frac{\upsilon^2}{c^2})= m^2c^4 \Leftrightarrow E^2\frac{m^2\upsilon^2}{p^2} = m^2c^4 \Leftrightarrow E=\frac{pc^2}{\upsilon}$. Τελικά έχουμε
$E^2-\frac{\upsilon^2}{c^2}E^2=m^2c^4 \Leftrightarrow E^2-\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{p^2c^4}{\upsilon^2}=m^2c^4 \Leftrightarrow E^2-p^2c^2= m^2c^4 \Leftrightarrow E^2=m^2c^4+ p^2c^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow E^2=(mc^2)^2+ p^2c^2$.

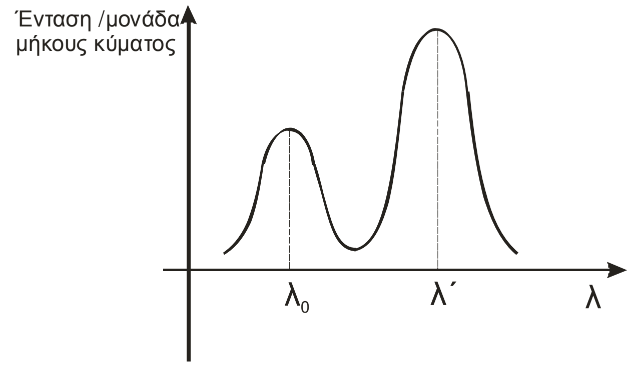
- Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου (σώματος), μπορεί να υπολογιστεί και από τη σχέση: $K=E-mc^2 \Leftrightarrow K=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - mc^2$. Για ακίνητο ηλεκτρόνιο $\upsilon=0$ και όπως προκύπτει από τη σχέση αυτή, έχουμε $K= mc^2- mc^2=0 \Leftrightarrow K=0$. Επίσης αν η ταχύτητα υ του ηλεκτρονίου τείνει στο c ($\upsilon\to c$), τότε $K\to\infty$. Τέλος για $\upsilon<<c$

αποδεικνύεται ότι ισχύει $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$. Πράγματι $\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\approx 1-\frac{\upsilon^2}{2c^2}$. Άρα

$$K=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-mc^2=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-1\right)=mc^2\left(\frac{1}{1-\upsilon^2/2c^2}-1\right)=mc^2\left(\frac{1-1+\upsilon^2/2c^2}{1-\upsilon^2/2c^2}\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow K=\dfrac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{1-\upsilon^2/2c^2}$ που για $\upsilon<<c$ μας δίνει τελικά $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$.

- Για το ηλεκτρόνιο οι σχέσεις της κλασικής φυσικής για την ορμή και για την ενέργεια είναι καλή προσέγγιση όταν η κινητική του ενέργεια είναι μικρότερη από 10keV (K<10keV).
- Για μεγάλες γωνίες σκέδασης θ, έχουμε μεγαλύτερο $\Delta\lambda$ άρα έχουμε μεγαλύτερη απώλεια ενέργειας των ακτινών X.
- Όταν τα e^- δεν είναι ελεύθερα, αλλά είναι ισχυρώς δέσμια τότε στη σχέση $\Delta\lambda=\frac{h}{mc}(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$, μάζα m είναι η μάζα όλου του ατόμου και όχι του ελεύθερου e^-. Επειδή όμως η μάζα του ατόμου είναι πολύ μεγαλύτερη (10^4 φορές) γι' αυτό σ' αυτήν την περίπτωση $\Delta\lambda\approx 10^{-4}$ $A^o\approx 0$ δηλαδή οι μεταβολές στο μήκος κύματος είναι πολύ μικρές και δεν μπορούν να ανιχνευθούν πειραματικά και ουσιαστικά τότε δεν παρατηρείται το φαινόμενο Compton.
- Κατά την σκέδαση των ακτίνων X, κατά μια ορισμένη κατεύθυνση παρατηρούνται δυο μέγιστα της έντασης. Το πρώτο (λ_0), αντιστοιχεί στο μήκος κύματος των αρχικών ακτίνων x δηλαδή σε σκέδαση από **δέσμια** e^- ενώ το μεγαλύτερο μήκος κύματος (λ'), αντιστοιχεί στη σκέδαση Compton .



,

- Σύμφωνα με την κλασική θεωρία θα έπρεπε τα ηλεκτρόνια του υλικού να εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση όταν προσπίπτει η ΗΛΜ ακτινοβολία και να ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα. Έτσι θα έπρεπε και αυτά με τη σειρά τους να παράγουν σαν μικρές κεραίες ηλεκτρομαγνητικό κύμα της ίδιας συχνότητας f . Σύμφωνα με την κλασική θεωρία, λοιπόν, θα έπρεπε η σκεδαζόμενη δέσμη να έχει την ίδια συχνότητα και άρα το ίδιο μήκος κύματος με την προσπίπτουσα δέσμη.

Παραδείγματα

14)Α) Αναφερόμαστε στο φαινόμενο Compton . Ακτίνες x με μήκος κύματος λ = 1 Å = 10^{-10} m κτυπούν στόχο από γραφίτη και η εξερχόμενη (σκεδαζόμενη) ακτινοβολία μετρείται σε γωνία 90^o ως προς την προσπίπτουσα . Τότε η μετατόπιση Δλ μεταξύ του μήκους κύματος της εξερχόμενης και της προσπίπτουσας ακτινοβολίας αν $\lambda_c = 2{,}4 \,.\, 10^{-12}$m, είναι:
α) Δλ = 0
β) Δλ = 1 Å
γ) Δλ =0,024 Å
δ) Δλ =10^{-10} Å.

Απάντηση:

$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \text{συνθ}) \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda c\,(1\text{- }\cancelto{0}{\text{συνθ}}) \Rightarrow \Delta\lambda = 2{,}4 \,.\, 10^{-12}$ m = 0,024 Å.

Β) Τότε η κινητική του ενέργεια μετά την κρούση είναι :
α) 290 e V
β) 290 J
γ)0,4 . 10^{-16} e V
δ) 0 e V

Απάντηση:

Ισχύει K = h f – h f΄ δηλαδή αν από την αρχική ενέργεια (h f) του προσπίπτοντος φωτονίου , αφαιρέσουμε την ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου. Άρα $K = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda'} = h\,c\,(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}) = h\,c\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda\lambda'} \Rightarrow$

$\Rightarrow K = 6{,}63.10^{-34}\,.3.10^{8}\,.(\frac{0{,}024}{1{,}024.10^{-10}}) \Rightarrow K = 19{,}89 \,.\, 10^{-16} \,.\, 0{,}02 \Rightarrow$

$\Rightarrow K = 0{,}466 \,.\, 10^{-16}\text{ J} = \frac{0{,}466.10^{-16}}{1{,}6.10^{-19}} = =0{,}29 \,.\, 10^{3} = 290$ eV.

15)Αν σε μια σκέδαση Compton το μήκος κύματος Compton είναι $\lambda_c = 2{,}4 \,.\, 10^{-12}$ m και η γωνία σκέδασης (παρατήρησης) είναι θ = 90^o τότε η μεταβολή του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι
α) Δλ = $1{,}2\cdot10^{-12}$ m
β) Δλ = $4{,}8\cdot10^{-12}$ m
γ) Δλ = 0
δ) Δλ =$2{,}4\cdot10^{-12}$ m.

Απάντηση:

Ισχύει $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}$ (1 – συνθ) όμως $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ άρα $\Delta\lambda = \lambda_c .(1 - συν 90^o)$

$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_c = 2{,}4 \,.\, 10^{-12}$ m.

16) Στο φαινόμενο Compton

α) το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας Χ είναι μεγαλύτερο από αυτό της προσπίπτουσας,

β) τα σκεδαζόμενα φωτόνια έχουν μεγαλύτερη ενέργεια από τα προσπίπτοντα,

γ) $\Delta\lambda = 0$

δ) η διαφορά της ενέργειας των προσπίπτωντων και σκεδαζομένων φωτονίων είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου.

17) Στο φαινόμενο Compton, θεωρούμε ότι σκεδάζονται σε ηλεκτρόναι δυο δέσμες ακτινών Χ, με μήκη κύματος λ_1 και λ_2 με $\lambda_1 > \lambda_2$. Τότε για την ίδια γωνία σκέδασης,

α) η αύξηση ($\Delta\lambda$), στο μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας Χ είναι μεγαλύτερη για την ακτινοβολία με μήκος κύματος λ_1,

β) η αύξηση (Δλ), στο μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας Χ είναι ίδια και στις δυο περιπτώσεις μια και εξαρτάται μόνο από τη γωνία σκέδασης,

γ) μεγαλύτερη κινητική ενέργεια αποκτά το ηλεκτρόνιο στο οποίο προκύπτει η ακτινοβολία με μήκος κύματος λ_1

δ) Το $\Delta\lambda$ γίνεται μέγιστο σε κάθε περίπτωση όταν η γωνία της προσπίπτουσας και της σκεδαζόμενης δέσμης είναι 0^0.

Απάντηση:

Για τις περιπτώσεις (α) και (β), ισχύει $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}$ (1 – συνθ) οπότε για την ίδια γωνία σκέδασης θ, ισχύει $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2$.

Στην περίπτωση (γ), επειδή $\lambda_1' = \lambda_1 + \frac{h}{mc}$ (1 – συνθ) και παρόμοια

$\lambda_2' = \lambda_2 + \frac{h}{mc}$ (1 – συνθ) και $\lambda_1 > \lambda_2$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1' > \lambda_2'$. Αυτό όμως σημαίνει ότι η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου στην πρώτη περίπτωση είναι μεγαλύτερη από ότι στη δεύτερη και άρα η κινητική ενέργεια αποκτά το ηλεκτρόνιο στο οποίο προκύπτει η ακτινοβολία με μήκος κύματος λ_2. Ή διαφορετικά $K_1 = \frac{h.c}{\lambda_1} - \frac{h.c}{\lambda_1'}$

$= \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1(\lambda_1 + \Delta\lambda)} \cdot hc$. Παρόμοια

$K_2 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_2(\lambda_2 + \Delta\lambda)} \cdot hc$ και επειδή $\lambda_1 > \lambda_2$ ισχύει $K_2 > K_1$.

Τέλος στην περίπτωση (δ) και επειδή ισχύει $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}$ (1 – συνθ), συμπεραίνουμε ότι το $\Delta\lambda$ γίνεται μέγιστο όταν το συνθ, γίνεται ελάχιστο κατά απόλυτητ τιμή, δηλαδή όταν συνθ=0 ή όταν $\theta = 90^0$.

18)Σε μια σκέδαση Compton και για γωνία σκέδασης (παρατήρησης) $\theta = 180^o$ η μεταβολή του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι
α) $\Delta\lambda = 0$
β) $\Delta\lambda = 2\cdot\frac{h}{mc}$
γ) $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}$
δ) $\Delta\lambda = 1/2\cdot\frac{h}{mc}$.

Απάντηση:

Ισχύει $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \text{συν}\theta)$ όμως $\text{συν}180^0=-1$ άρα $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}.(1+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta\lambda = 2\cdot\frac{h}{mc}$.

19)Σε μια σκέδαση Compton η ενέργεια ενός φωτονίου της δέσμης είναι E=0,5MeV. Τότε για γωνία σκέδασης $\theta = 60^o$ η κινητική ενέργεια του ελεύθερου ηλεκτρονίου είναι:
α) K = 0
β) K=0,25 MeV
γ) K = 0,165 MeV
δ) K=1,65 MeV.

Απάντηση:

Επειδή $E=h\cdot c/\lambda$ προκύπτει $\lambda=\frac{h.c}{E}=24\cdot10^{-13}$m.

Ακόμη ισχύει $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \text{συν}60^0)= \frac{h}{2mc}=11{,}8\cdot10^{-13}$m και $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda$ ή $\lambda'=\lambda+\Delta\lambda=35{,}8\cdot10^{-13}$m.
Άρα η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου θα είναι $E'= h\cdot c/\lambda'=0{,}335$ MeV. Τότε όμως η ενέργεια του ελεύθερου ηλεκτρονίου θα είναι ίση με τη μεταβολή της ενέργειας του φωτονίου άρα $K=E-E'=0{,}165$ MeV.

20) Αποδείξτε ότι το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δεν μπορεί να συμβεί για ελεύθερα ηλεκτρόνια .

Απάντηση:
Έστω ότι τα e^- είναι ελεύθερο και ακίνητο και έχει ενέργεια ηρεμίας $E_o = m\,c^2$.
Τότε Α.Δ. Ε $\Rightarrow h\,f = E - E_o$ (1) όπου Ε είναι η τελική ενέργεια του φωτοηλεκτρονίου και h f η ενέργεια του φωτονίου
Ακόμη
Α.Δ.Ο $\Rightarrow \rho_{αρχ} = \rho_{τελ}$
$\rho_{αρχ} = \rho_{\varphi} + \rho_{ηλ} \Rightarrow \rho_{αρχ} = \frac{hf}{c}$.

$\rho_{τελ} = \rho_{φ}' + \rho_{ηλ}' \Rightarrow \rho_{τελ} = \rho_{ηλ}'$ όμως $E^2 = (m c^2)^2 + (\rho c)^2 \Rightarrow E^2 = E_o^2 + (\rho c)^2 \Rightarrow \rho = \dfrac{\sqrt{E^2 - E_o^2}}{c} = \rho_{ηλ}'$.

Άρα $\dfrac{hf}{c} = \dfrac{\sqrt{E^2 - E_o^2}}{c} \Rightarrow h f = \sqrt{E^2 - E_o^2} \Rightarrow^{(1)} E - E_o = \sqrt{(E - E_o)(E + E_o)} \Rightarrow (E-E_o)^2 = (E - E_o)(E + E_o) \Rightarrow E - E_o = E + E_o \Rightarrow E_o = 0$, που είναι άτοπο και δεν ισχύει γιατί η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου δεν είναι μηδέν .

§7.5 και 7.6 Κυματικές ιδιότητες σωματιδίων
Louis de Broglie

1) Louis de Broglie (Αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού).

Ένα σωμάτιο με μηδενική μάζα ηρεμίας - τέτοιο είναι το φωτόνιο - έχει ενέργεια E = pc. Όμως είδαμε επίσης ότι η ενέργεια ενός φωτονίου είναι $\boxed{E = h \cdot f} = h \cdot \dfrac{c}{\lambda}$, συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ορμή του φωτονίου συνδέεται με το μήκος κύματός του με τη σχέση: $E = h \cdot \dfrac{c}{\lambda} \Leftrightarrow pc = h \cdot \dfrac{c}{\lambda} \Leftrightarrow \boxed{p = \dfrac{h}{\lambda}}$. **Αυτές ακριβώς οι σχέσεις συνδέουν τα κυματικά χαρακτηριστικά f,λ του ηλεκτρομαγνητικού κύματος με τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά E,p του φωτονίου (φορέα της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης).**

Ο **Louis de Broglie (1923)**, πιστεύοντας στη συμμετρία της φύσης υπέθεσε ότι, όχι μόνο το φωτόνιο αλλά κάθε **κινούμενο** σωματίδιο έχει και κυματικές ιδιότητες. Τα πειράματα **περίθλασης** δέσμης ηλεκτρονίων, που κινούνται με μεγάλη ταχύτητα (Davisson – Germer), έδειξαν ότι και αυτά **περιθλώνται** όπως ακριβώς τα φωτόνια (ακτίνες Χ), άρα είναι λογικό να υποθέσουμε ότι έχουν **και κυματική** συμπεριφορά. Παρόμοια πειράματα έγιναν και με σωμάτια α καθώς και με νετρόνια με τα ίδια αποτελέσματα.

Γενικά λοιπόν ένα κινούμενο σωματίδιο με ταχύτητα υ όπως ένα ηλεκρόνιο, έχει ορμή p και ενέργεια E που συνδέονται με τα κυματικά χαρακτηριστικά των κυμάτων που είναι το μήκος κύματος λ και η συχνότητα f και ισχύουν:

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{p}}.$$ Μήκος κύματος de Broglie.

$$E = h \cdot f \Leftrightarrow \boxed{f = \frac{E}{h}}.$$

Οι παραπάνω σχέσεις που είναι ακριβώς ίδιες με αυτές των φωτονίων, συνδέουν την ορμή, που είναι μία καθαρά σωματιδιακή ιδιότητα, με μια καθαρά κυματική ιδιότητα, όπως είναι το μήκος κύματος, καθώς το ίδιο και την ενέργεια με τη συχνότητα. Ο μεταξύ τους σύνδεσμος είναι η **σταθερά h του Planck**. Έτσι υπάρχουν φαινόμενα που ερμηνεύονται με τη σωματιδιακή τους φύση και άλλα με την κυματική τους φύση.

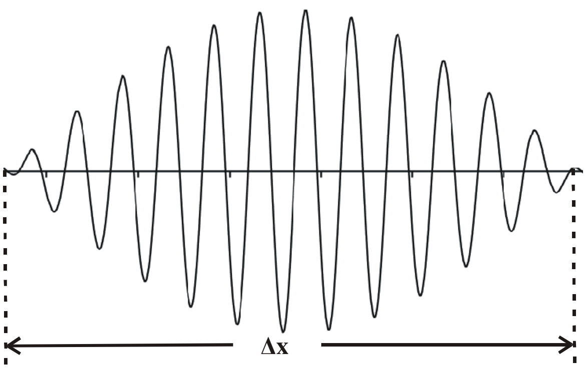
2) Αρχή της αβεβαιότητας ή της απροσδιοριστίας του Heisenberg

✓ Αν η ορμή p, ενός κινούμενου σωματιδίου είναι πλήρως καθορισμένη τότε σε αυτήν αντιστοιχεί κατά de Broglie και ένα μήκος κύματος, που θα είναι επίσης πλήρως καθορισμένο $\lambda=\frac{h}{p}$. Αν θεωρήσουμε ότι το κινούμενο σωματίδιο έχει και κυματικές ιδιότητες, τότε **το στιγμιότυπο** ενός γραμμικού αρμονικού κύματος με συγκεκριμένο λ και τη χρονική στιγμή t=0, περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής $\boxed{\mathbf{y=A\cdot ημ2π\frac{x}{λ}.}}$ Για μια οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή θα υπήρχε και ένας σταθερός όρος μέσα στο ημίτονο $y=A\cdot ημ2π(\frac{x}{λ}+c)$**.** Όμως τότε το x που είναι ένα στατιστικό μέγεθος με συνεχή κατανομή, μπορεί να πάρει όλες τις τιμές από **- ∞ έως + ∞.** Το στιγμιότυπο του κύματος καλύπτει κάθε χρονική στιγμή όλο το χώρο από το -∞ έως το +∞. Στο ερώτημα λοιπόν που βρίσκεται το σωματίδιο **εισάγεται μια αβεβαιότητα**. Το σωματίδιο μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε στο διάστημα από - ∞ έως + ∞. Δε μπορούμε δηλαδή να το εντοπίσουμε σε μια θέση ή ισοδύναμα η απροσδιοριστία ως προς τη θέση του πάνω στον άξονα των x, θα είναι **Δx=∞.** Έτσι λοιπόν όσο ποιο βέβαιοι είμαστε για το μήκος κύματος (λ) (μονοχρωματική ακτινοβολία), άρα και την ορμή (p), του κινούμενου σωματιδίου, τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα (απροσδιοριστία) Δx, ως προς τη θέση του (x).

Να παρατηρήσουμε ότι η **κυματοσυνάρτηση y** δεν είναι ένα μετρήσιμο κλασικό κύμα αλλά είναι ένα κύμα πιθανότητας ή πλάτους πιθανότητας να εντοπίσουμε σε κάποια περιοχή του χώρου, ένα σωματίδιο π.χ ένα ηλεκτρόνιο.

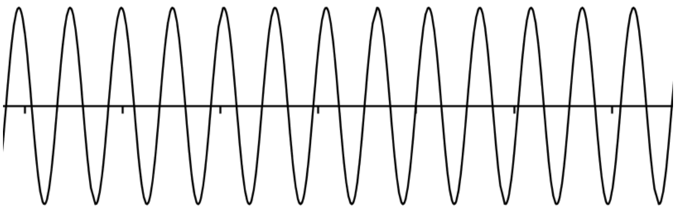
✓ Να παρατηρήσουμε ακόμη ότι δε νοείται να έχουμε ταυτόχρονα και τις δυο φύσεις κυματική και σωματιδιακή μια και το σωματίδιο είναι εντοπισμένο και αδιαίρετο ενώ το κύμα εκτεταμένο και διαιρετό (πείραμα δυο σχισμών).

✓ Ένα σωματίδιο συνήθως όμως δεν είναι ελεύθερο να κινείται σε όλο το χώρο ή έστω σε όλον τον άξονα xox΄ (μονοδιάστατη κίνηση), αλλά συνήθως είναι παγιδευμένο σε μια ορισμένη περιοχή του χώρου. **Μια τέτοια παγίδα για το ηλεκτρόνιο είναι συνήθως το άτομο στο οποίο ανήκει αυτό**. Έχουμε λοιπόν ένα κύμα περιορισμένο στο χώρο. Ένα τέτοιο κύμα θα το ονομάζουμε **κυματοπακέτο** και τέτοια κυματοπακέτα θα χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την κυματική συμπεριφορά των κινούμενων σωματιδίων. **Στο σχήμα φαίνεται η αβεβαιότητα Δx ως προς τη θέση, ενός τέτοιου κυματοπακέτου - ηλεκτρονίου.** Σημειωτέον πάντως, ότι στην περίπτωση αυτή που έχουμε κυματοπακέτο ή παλμό περιορισμένο σε μια περιοχή του χώρου, το κύμα **παύει να είναι μονοχρωματικό** και αυτή η ετεροχρωματική ακτινοβολία πλέον θα προκύπτει ως άθροισμα όρων μονοχρωματικής ακτινοβολίας διαφόρων συχνοτήτων ή μηκών κύματος λ και

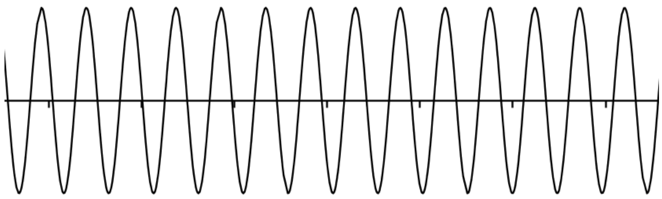


πλατών, παρόλο που μπορεί να έχει ημιτονοειδή μορφή. Επίσης τα διαδιδόμενα κύματα που με την επαλληλία τους σχηματίζουν το κυματοπακέτο, μπορούν να διαδίδονται τόσο κατά την θετική όσο και κατά την αρνητική φορά του άξονα των x.

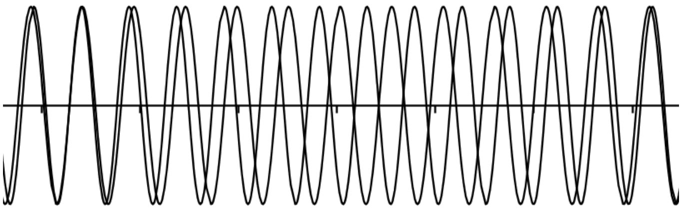
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυο μονοχρωματικές ακτινοβολίες (I) και (II) από την υπέρθεση των οποίων δημιουργήθηκε το κυματοπακέτο του πάνω σχήματος. Επίσης φαίνονται και στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ.III)



(I)



(II)



(III)

Σε αυτή την περίπτωση που περιορίζουμε το ηλεκτρόνιο σε μια ορισμένη περιοχή έχουμε αμέσως μια **βεβαιότητα για τη θέση του x**. Τι γίνεται όμως με την ενέργειά του E και άρα με την ορμή του p, δεδομένου ότι $\boxed{\mathbf{E=\frac{p^2}{2m}}}$ με p=mv.

Θα μπορούσαμε ίσως να πούμε πως για την ταχύτητα ταλάντωσης για καθορισμένο x, ας πούμε x=0 έχουμε $v=v_{max}$συνωt όπου ο χρόνος t μπορεί να πάρει όλες τις τιμές από **- ∞ έως + ∞. Τότε έχουμε μια αβεβαιότητα στην ταχύτητα και στην ορμή του σωματιδίου και άρα και στο μήκος κύματός του λ, δεδομένου ότι** $\lambda=\frac{h}{p}$**.**

✓ Δηλαδή το λ έχει μεγάλο εύρος τιμών. Τότε όμως μπορούμε να ισχυριστούμε με βάση αυτά που είπαμε, πως με την υπέρθεση μεγάλου αριθμού κυμάτων διαφορετικών συχνοτήτων και άρα μηκών κύματος λ (**μεγάλη αβεβαιότητα στο λ**

άρα και στην ορμή (**Δp**)), μπορούμε να συνθέσουμε ένα κυματοπακέτο, όπως στο σχήμα περιορισμένο σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου (θέση x). Τότε λέμε ότι έχουμε **περιορισμένη αβεβαιότητα Δx**, ως προς τη θέση του στο χώρο και άρα τόσο πλησιάζουμε την σωματιδιακή εικόνα του σωματίου.

✓ Έτσι λοιπόν σύμφωνα με την **αρχή της αβεβαιότητα (ή απροσδιοριστίας)** του **Heisenberg** είναι αδύνατο να προσδιορίσουμε ταυτόχρονα και τη θέση και την ορμή (άρα ταχύτητα) ενός σωματιδίου στο χώρο.

Τα παραπάνω κωδικοποιούνται με τις σχέσεις:

- $\Delta x \cdot \Delta p x \geq \frac{h}{2\pi}$ και $\Delta y \cdot \Delta p y \geq \frac{h}{2\pi}$ και $\Delta z \cdot \Delta p z \geq \frac{h}{2\pi}$. Όμως η βεβαιότητα σε μια συντεταγμένη δεν σχετίζεται με διαφορετική συνιστώσα ορμής π.χ , η Δx δεν σχετίζεται άμεσα με τη Δpy.
- Γενικά Δx : αβεβαιότητα ως προς τη θέση και Δp : αβεβαιότητα ως προς την ορμή .
- Ακόμη $\Delta x \cdot \Delta(m \cdot \upsilon x) \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta \upsilon x \geq \frac{h}{2\pi m}$.
- Αν $\Delta p \rightarrow 0$ τότε $\Delta x \rightarrow \infty$ και το αντίθετο δηλαδή αν $\Delta x \rightarrow 0$ τότε $\Delta p \rightarrow \infty$. Έτσι ένα σωμάτιο εγκλωβισμένο σε μια πολύ μικρή περιοχή π.χ στον πυρήνα ενός ατόμου όπου $\Delta x \rightarrow 0$, έχει πολύ μεγάλη ορμή και άρα πολύ μεγάλη ενέργεια!

- **Αβεβαιότητα στην ενέργεια:**

Μια άλλη διατύπωση της αρχής της αβεβαιότητας είναι η $\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}}$.

Ισχύει $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$. Όμως $p = \frac{h}{\lambda} \Leftrightarrow p = \frac{hf}{c} = \frac{E}{c} \Leftrightarrow \Delta p = \frac{\Delta E}{c}$, άρα έχουμε $\Delta x \cdot \frac{\Delta E}{c} \geq \frac{h}{2\pi}$ όπου $c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{c}$. Τελικά προκύπτει $\Delta x \cdot \frac{\Delta E}{c} \geq \frac{h}{2\pi} \Leftrightarrow \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$.

Δηλαδή για να μετρήσουμε με ακρίβεια την ενέργεια ενός κινούμενου σωματιδίου πρέπει να διαθέτουμε άπειρο χρόνο. Δηλαδή για $\Delta E \rightarrow 0$, πρέπει $\Delta t \rightarrow \infty$. Έτσι όσο πιο μεγάλο είναι το Δt τόσο μικρότερη είναι η βεβαιότητα ως προς την ενέργεια (ΔE) και τόσο πιο καλά καθορισμένη είναι αυτή . Όσο πάλι πιο μικρό είναι το Δt τόσο πιο μεγάλη είναι η αβεβαιότητα ως προς την ενέργεια .

Έτσι π.χ, γνωρίζουμε πως ένα διεγερμένο άτομο εκπέμπει ακτινοβολία όταν αποδιεγείρεται από μια διεγερμένη κατάσταση και γνωρίζουμε πως σε κάθε ενεργειακό άλμα εκπέμπεται ένα φωτόνιο. Από τη μελέτη των φασμάτων εκπομπής συμπεραίνουμε ότι οι φασματικές γραμμές δεν είναι αυστηρά καθορισμένες (μαθηματικές γραμμές), αλλά η κάθε μια εμφανίζει ένα φυσικό εύρος. **Το εύρος των φασματικών γραμμών εξηγείται με την αρχή της αβεβαιότητας.**

Ένα διεγερμένο άτομο παραμένει στη διεγερμένη κατάσταση για χρόνο της τάξης του 10^{-8}s και στη συνέχεια αποδιεγείρεται με ένα ή περισσότερα ενεργειακά άλματα εκπέμποντας ακτινοβολία.

Τότε από τη σχέση $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$, προκύπτει $\Delta(hf) \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ ή

$h \cdot \Delta f \geq \frac{h}{2\pi \Delta t}$ ή $\Delta f \geq \frac{1}{2\pi \Delta t}$ και για $\Delta t = 10^{-8}$s προκύπτει $\Delta f \geq 1{,}6 \cdot 10^{7}$Hz όπου το $\Delta f_{min} = 1{,}6 \cdot 10^{7}$Hz, είναι το ελάχιστο εύρος μιας φασματικής γραμμής.

Παραδείγματα

21)Ένα e^- περιορίζεται σ' ένα κυβικό κουτί πλευράς α $=6{,}63\cdot10^{-11}$ m . Τότε η ελάχιστη αβεβαιότητα στην ορμή e^- είναι
α) $\Delta\rho x = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ kg m/s
β) $\Delta\rho x = 19{,}89 \cdot 10^{-24}$ kg m/s
γ) $\Delta\rho x = 6{,}63\cdot10^{-24}$ kg m/s
δ) $\Delta\rho x = \frac{5}{\pi}\cdot10^{-24}$ **kg m/s.**

Απάντηση:

Ισχύει $\Delta\rho x \,.\, \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$ την ελάχιστη αβεβαιότητα Δρx θα την έχουμε όταν το Δx είναι μέγιστο , δηλαδή $\Delta x = \alpha = 6{,}63 \,.\, 10^{-11}$ m . Οπότε $\Delta\rho x \,.\, \Delta x = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta\rho x = \frac{h}{2\pi\Delta x} = \frac{6{,}63.10^{-34}}{2\pi.6{,}63.10^{-11}} = \frac{10^{-23}}{2\pi} = \frac{5}{\pi}\cdot10^{-24}$ kg. m/s.

22) Το άτομο το υδρογόνου παραμένει στην πρώτη διεγερμένη στάθμη (n = 2) για χρόνο της τάξης $\Delta t = 10^{-8}$ sec . Αν $E_1 = -13{,}6$ e V τότε η αβεβαιότητα ως προς την ενέργεια στη στάθμη αυτή του υδρογόνου είναι:
Α)
α) $\Delta E = 6{,}25\cdot10^{-8}$ **eV**
β) $\Delta E = 10^{-26}$ eV
γ) $\Delta E = 6{,}25 \cdot10^{-8}$ J
δ) $\Delta E = 13{,}6 \cdot10^{-8}$ eV.

Απάντηση:

Ισχύει $\Delta E \,.\, \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta E \geq \frac{h}{2\pi.\Delta t}$.

Για την ελάχιστη αβεβαιότητα ως προς την ενέργεια έχουμε $\Delta E = \frac{h}{2\pi.\Delta t} = \frac{6{,}63.10^{-34}}{2\pi.10^{-8}} \Rightarrow \Delta E \approx 10^{-26}$ J ή $\Delta E = \frac{10^{-26}}{1{,}6.10^{-19}} = 0{,}625\cdot 10^{-7} = 6{,}25\cdot10^{-8}$ e V.

Β) Το μήκος κύματος του φωτονίου που εκπέμπεται καθώς το προηγούμενο άτομο αποδιεγείρεται από τη n = 2 στη n = 1 είναι
α) λ = 600nm
β) λ = 750nm
γ) λ = 121nm
δ) λ = 500nm.

Απάντηση:

Ισχύει $E_2 - E_1 = h\,\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} \Rightarrow \lambda = \frac{6{,}63.10^{-34}.3.10^{8}}{(-3{,}4+13{,}6).1{,}6.10^{-19}} \Rightarrow$

$\lambda = \frac{19{,}89.10^{-26}}{16{,}32.10^{-19}} \Rightarrow \lambda = 1{,}21\cdot10^{-7} \Rightarrow \lambda = 121$ nm.

Γ) Το φυσικό εύρος στο μήκος κύματος της φασματικής γραμμής είναι
α) $\Delta\lambda = 121$ nm
β) $\Delta\lambda = 74\cdot10^{-8}$nm
γ) $\Delta\lambda = 74$ nm
δ) $\Delta\lambda = 121\cdot10^{-8}$ nm.

Απάντηση:

Κατά την αποδιέγερση εκπέμπεται φωτόνιο ενέργειας $E = E_2 - E_1 \Rightarrow E = 10{,}2$ e V .
Τότε η κλασματική αβεβαιότητα ενέργειας είναι $\frac{\Delta E}{E} = \frac{6{,}25.10^{-8}}{10{,}2} = 0{,}61\cdot10^{-8}$.
Άρα $\Delta\lambda = 0{,}61\cdot10^{-8}\cdot\lambda = 0{,}61\cdot 10^{-8}\cdot 121 \Rightarrow \Delta\lambda = 74\cdot 10^{-8}$ nm
Αυτό το Δλ ονομάζεται φυσικό εύρος γραμμής .

23) Τα άτομα του αερίου που περιέχονται σε σωλήνα διαφημίσεων διεγείρονται σε μια ενεργειακή στάθμη , που έχει μέσο χρόνο ζωής $\tau = 10^{-8}$ s . Ποια είναι η τάξη μεγέθους του φυσικού εύρους Δν της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται κατά την αποδιέγερση; (Εξ 2002)
α) KH_Z
β)MH_Z
γ)H_Z
δ)GH_Z.

Απάντηση:
Για την ελάχιστη αβεβαιότητα ως προς την ενέργεια ισχύει
$\Delta E\cdot\Delta t = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta E = \frac{h}{2\pi.\Delta t} \Rightarrow h\,.\,\Delta f = \frac{h}{2\pi.\Delta t} \Rightarrow \Delta f = \frac{10^8}{2\pi} \approx 16\,.\,10^6$ Hz ή 16 MHz.

24) Ένα σωματίδιο κινείται στον άξονα x΄οx με ταχύτητα πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός. Αν η αβεβαιότητα της θέσης του είναιίση με το μήκος κύματός του κατά de Broglie, τότε η ελάχιστη αβεβαιότητα της ταχύτητάς του είναι:
α) $\Delta\upsilon_x = \frac{\upsilon_x}{2\pi.\Delta t}$
β) $\Delta\upsilon_x = \frac{\upsilon_x}{2\pi}$
γ) $\Delta\upsilon_x = \frac{h}{p}$
δ) $\Delta\upsilon_x = \frac{h}{p.\Delta t}$

Απάντηση:

Για το μήκος κύματος κατά de Broglie ισχύει $\lambda=\frac{h}{p}$. Επειδή υ<<c, ισχύει και $p=m\cdot\upsilon_x$,

άρα έχουμε $\lambda=\frac{h}{m.\upsilon_x}$. Ακόμη $\Delta x=\lambda=\frac{h}{m.\upsilon_x}$. Ισχύει $\Delta p_x\,.\,\Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$ ή

$m\Delta\upsilon_x\cdot\,\Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$ ή $m\Delta\upsilon_x\cdot\frac{h}{m.\upsilon_x} \geq \frac{h}{2\pi}$ ή $\Delta\upsilon_x\geq\frac{\upsilon_x}{2\pi}$. Άρα η ελάχιστη αβεβαιότητα της ταχύτητάς του είναι $\Delta\upsilon_x=\frac{\upsilon_x}{2\pi}$.

§7.7 Η εξίσωση του Schrödinger

✓ Είπαμε προηγουμένως ότι ένα σωματίδιο συνήθως δεν είναι ελεύθερο να κινείται σε όλο το χώρο ή έστω σε όλον τον άξονα xox΄, αλλά είναι παγιδευμένο σε μια ορισμένη περιοχή του χώρου και ότι μια τέτοια παγίδα για το ηλεκτρόνιο είναι συνήθως το άτομο στο οποίο ανήκει αυτό.

✓ Έχουμε λοιπόν ένα κύμα περιορισμένο στο χώρο (**κυματοπακέτο**). Ένα κύμα όμως περιορισμένο στο χώρο μας θυμίζει το στάσιμο «κύμα».

✓ Στη μονοδιάστατη περίπτωση κίνησης, θεωρούμε ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x μέσα σε κουτί ή αλλιώς πηγάδι απείρου βάθους. Το σωματίδιο κινείται μέσα στο κουτί ανακλώμενο ελαστικά μεταξύ δυο ακλόνητων τοίχων σε απόσταση L .

✓ Επειδή $\mathbf{0 \leq x \leq L}$ πρέπει η κυματοσυνάρτησή του να μηδενίζεται έξω απ' αυτό το διάστημα. Επιπλέον πρέπει η Ψ να είναι συνεχής συνάρτηση του x και θα πρέπει να μηδενίζεται στα σημεία x = 0 και x = L (συνοριακές συνθήκες).

Αυτές όμως οι παραδοχές μας θυμίζουν τον κανονικό τρόπο ταλάντωσης χορδής με ακλόνητα τα δυο της άκρα . Οπότε έχουμε τη δημιουργία στάσιμου κύματος που προκύπτει από την επαλληλία των

$y_1 = A'$ ημ $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ και $y_2 = -\,A'$ ημ $2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$ όποτε η εξίσωση για το στάσιμο κύμα είναι:

$y = 2\,A'$ ημ $2\pi\,\frac{x}{\lambda}$ συν $2\pi\,\frac{t}{T}$.

Το πλάτος του στάσιμου κύματος είναι $\psi = A$ ημ $2\pi\,\frac{x}{\lambda}$ ή

$\psi = A$ ημ $K\,x$

($K = \frac{2\pi}{\lambda}$ κυματάριθμος και $A=2\,A'$).

Τότε και η συνάρτηση που περιγράφει την κυματική συμπεριφορά του κινούμενου σωματιδίου δηλαδή το κυματοπακέτο θα είναι της μορφής

$$\psi\,(x) = A \text{ ημ } 2\pi\,\frac{x}{\lambda}.$$

Η εξίσωση μορφής $\boldsymbol{\psi(x)=A\cdot}$**ημ** $\boldsymbol{2\pi\frac{x}{\lambda}}$ είναι η γενική μορφή κυματοσυνάρτησης σωματιδίου σε κουτί.

Όμως για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα σε χορδή μήκους L, θα πρέπει για το μήκος της χορδής να ισχύει η σχέση **$L = n\cdot\frac{\lambda}{2}$**. Έτσι και για το κυματοπακέτο ισχύει η ίδια σχέση, όπου L είναι το μήκος του κουτιού και λ το μήκος κύματος κατά de Broglie του κινούμενου σωματιδίου .

Άρα ισχύει $\rho = \frac{h}{\lambda}$ και $E = \frac{\rho^2}{2m}$. Όμως $\lambda = \frac{2L}{n}$ άρα $\rho = \frac{nh}{2L}$ και

$E = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$ κβαντισμένη ενέργεια .

Η παραπάνω σχέση υπολογίζει την ενέργεια του e^-, σε **πηγάδι δυναμικού απείρου βάθους**. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση ισχύει $E_n=n^2\cdot E_1$, δηλαδή η ενέργειά του είναι ανάλογη του n^2.

Παρατηρήστε ότι η ολική ενέργεια δεν μπορεί να είναι μηδέν $n \neq 0$ γιατί θα παραβιάζονταν η αρχή της αβεβαιότητας.

Δηλαδή για κάθε τιμή του n έχουμε διαφορετικό λ , ρ και Ε οπότε αν τα ονομάσουμε λ_n , ρ_n και E_n προκύπτει $\rho_n = \frac{nh}{2L} = \frac{h}{\lambda_n}$ και $E_n = \frac{\rho_n^2}{2m} \Rightarrow E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$ n = 1,2,3 ... ενώ και οι κυματοσυναρτήσεις $\psi_{n\,(x)}$ για το σωματίδιο μέσα στο κουτί για της διάφορες τιμές του n θα έχουν τη γενική μορφή :

$\Psi_{n\,(x)} = A$ ημ $2\pi\frac{x}{\lambda}$ επειδή όμως $\lambda = \frac{2L}{n}$ τελικά για **πηγάδι απείρου βάθους** έχουμε:

$\psi_{n\,(x)} = A\cdot$ημ $\frac{n\,\pi\,x}{L}$ για $0 \le x \le L$ $n \ge 1,2,3$ ... ενώ
$\psi_{n\,(x)} = 0$ για $x < 0$ ή $x > L$

- Το $|\Psi|^2 dx$ εκφράζει την **πιθανότητα** να βρίσκεται το σωματίδιο στο μικρό διάστημα dx κοντά στο x.

Άρα $|\Psi|^2 dx = A^2$ ημ$^2 \frac{n\pi x}{L}dx$. Όμως τότε το άθροισμα των πιθανοτήτων δηλαδή η ολική πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στο διάστημα $0 \le x \le L$ πρέπει να είναι ίσο με την μονάδα δηλαδή:

$$\int_0^L |\Psi|^2 dx = \int_0^L A^2 \text{ ημ}^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1$$

Όμως $\int_0^L A^2$ ημ$^2 \frac{n\pi x}{L} = A^2\frac{L}{2}$, άρα $A^2\frac{L}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$.

Μια κυματοσυνάρτηση Ψn (x) με $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ δηλαδή τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η σχέση $\int_0^L |\Psi|^2 dx = 1$ (συνθήκη κανονικοποίησης) , ονομάζεται κανονικοποιημένη ή νορμαλοποιημένη ενώ η διαδικασία προσδιορισμού της σταθεράς Α ονομάζεται κανονικοποίηση (νορμαλοποίηση) .

Άρα οι κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις του σωματιδίου σε κουτί για διάφορες τιμές του n είναι:

$$\Psi_n (x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \eta\mu\ \frac{n\pi x}{L}$$

Παρατηρείστε : ότι αν η αβεβαιότητα ως προς τη θέση είναι Δx = L και η αβεβαιότητα ως προς την ορμή είναι $\Delta\rho = \frac{h}{2L}$ για n = 1 τότε $\Delta x\, \Delta\rho = L\, \frac{h}{2L} = \frac{h}{2}$.

✓ Στην περίπτωση κίνησης στο χώρο το γινόμενο $|\Psi|^2 dV$, εκφράζει την πιθανότητα να βρίσκεται το e^-, γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο (x,y,z) και σε έναν ορισμένο όγκο dV. Τότε η συνθήκη κανονικοποίησης γίνεται $\int |\Psi|^2\, dV = 1$.

✓ Την απάντηση στο πως βρίσκουμε μια κυματοσυνάρτηση την έδωσε ο **Erwin Schrödinger**.

Επειδή οι κυματοσυναρτήσεις Ψ_n (x) περιγράφουν ενεργειακές καταστάσεις στις οποίες μπορεί δυνητικά να βρεθεί ένα σωματίδιο ο Schrödinger προσπάθησε να βρει τη βασική σχέση μεταξύ των κυματοσυναρτήσεων Ψ_n (x) και των ενεργειακών σταθμών En.

Η γενική λύση των κυματοσυναρτήσεων σε κουτί είναι όπως είπαμε

$\Psi_{(x)} = A\ \eta\mu\ \frac{2\pi x}{\lambda}$.

Παρατήρησε λοιπόν ότι η δεύτερη παραγωγός της Ψ_n (x) ως προς x είναι

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2\pi A}{\lambda}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\ \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\ A\ \eta\mu\ \frac{2\pi x}{\lambda}$$

Ακόμη η ενέργεια μιας κατάστασης είναι ως γνωστό $E = \frac{\rho^2}{2m}$ με $\rho = \frac{h}{\lambda}$ άρα $E = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$.

Αν πολλαπλασιάσουμε την ενέργεια Ε με την κυματοσυνάρτηση Ψ τότε προκύπτει

$$E\,.\,\Psi = \frac{h^2}{2m\lambda^2}\ A\ \eta\mu\ \frac{2\pi x}{\lambda} \qquad (1)$$

Όμως αν πολλαπλασιάσουμε και την $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ με τον παράγοντα $\frac{-h^2}{8\pi^2 m}$ προκύπτει :

$$\frac{-h^2}{8\pi^2 m}\ .\ \frac{d^2\psi}{dx^2} = +\frac{h^2}{8\pi^2 m}\ .\ \frac{4\pi^2}{\lambda^2} A\ \eta\mu\ \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}\ A\ \eta\mu\ \frac{2\pi x}{\lambda} \qquad (2)$$

Άρα από τις (1) και (2) προκύπτει

$-\ \frac{h^2}{8\pi^2 m}\ .\ \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\,.\,\Psi$ ή επειδή $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ γράφεται

$$-\ \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} = \mathbf{E\cdot\Psi}\ ,$$

που αποτελεί και την απλούστερη μορφή της **εξίσωσης του Schrödinger**

και αναφέρεται σ' ένα **ελεύθερο** σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα των x σε κουτί , άρα **χρονοανεξάρτητη εξίσωση** , χωρίς την επίδραση κάποιας δύναμης άρα ύπαρξης δυναμικού .
Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται είναι κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης με τα τοιχώματα του δοχείου.
Ακόμη στη συγκεκριμένη περίπτωση η ολική ενέργεια Ε είναι ίση με την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου αφού η δυναμική του ενέργεια είναι μηδεν. Άρα $E=K=\frac{p^2}{2m}$.

- Αν όμως το σωματίδιο υπόκειται στην επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης F (x) κατά μήκος του άξονα των x τότε λαβαίνοντας υπόψη μας και την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια U(x) , τότε η γενίκευση αυτή για τη μονοδιάστατη εξίσωση του Schrödinger μας οδηγεί στη σχέση

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\cdot\Psi=E\cdot\Psi\ .$$

Η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν $U = 0$ στο διάστημα $0 \le x \le L$ και απειρίζεται οπουδήποτε αλλού, έξω από το διάστημα αυτό.
Στην περίπτωση αυτή η ολική ενέργεια Ε είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας δηλαδή $E=\frac{p^2}{2m}+U=K+U$.
Χωρίς όμως να είναι δυνατή σε κάποιο σημείο του χώρου η ταυτόχρονη γνώση της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας γιατί τότε θα χρειάζονταν η ταυτόχρονη γνώση της θέσης και της ορμής πράγμα το οποίο παραβιάζει την αρχή της αβεβαιότητας.

✓ Στις τρεις διαστάσεις η χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger γίνεται $-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2\Psi+U\cdot\Psi=E\cdot\Psi$

✓ Στη γενικότερη περίπτωση πάντως η κυματοσυνάρτηση είναι μία συνάρτηση όχι μόνο της θέσης αλλά και του χρόνου δηλαδή Ψ=Ψ(x,y,z,t).
Για την χρονοεξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger, προκύπτει ότι ισχύει:
$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2\Psi+U\cdot\Psi=i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}$, η οποία για ελεύθερο σωμαίδιο μάζας m γίνεται $-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2\Psi=i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}$. Σε αυτή την περίπτωση για ελεύθερο σωματίδιο μάζας m, σε μια αυθαίρετη διεύθυνση $\vec{k}$, η παραπάνω εξίσωση Schrödinger, έχει λύση την κυματοσυνάρτηση $\Psi=e^{i(\vec{k}.\vec{x}-\omega t)}$, με $\vec{p}=\hbar\cdot\vec{k}$ και $E=\hbar\cdot\omega$. Επειδή όμως ισχύει και $E=\frac{p^2}{2m}$ έχουμε και
$\hbar\cdot\omega=\frac{k^2\hbar^2}{2m}$ ή $\omega=\frac{\hbar k^2}{2m}$.

✓ Η σύγχρονη κβαντομηχανική θεμελιώνεται και με τις παρακάτω προτάσεις:

Α. Σε κάθε μετρήσιμο φυσικό μέγεθος Α αντιστοιχεί ένας γραμμικός ερμιτιανός τελεστής $\hat{A}$ έχοντας υπόψη μας ότι :
$\vec{r}\rightarrow\hat{\vec{r}}=\vec{r}$ και

$\vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$.

Αυτό πιο απλά σημαίνει ότι ο τελεστής του x είναι το ίδιο το x δηλαδή $\hat{x}$=x παρόμοια $\hat{y}$=y και $\hat{z}$=z. Ακόμη $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$ και $\hat{p}_y = -i\hbar\frac{d}{dy}$ και $\hat{p}_z = -i\hbar\frac{d}{dz}$.

Ακόμη για την ενέργεια ορίζεται ο τελεστής ενέργειας $\hat{E}$ με $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$.

Τέλος ο Hamiltonian τελεστής είναι $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V = -\frac{\hbar^2}{2m} + V$. Τότε και η χρονοεξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger, γράφεται:

$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2\Psi + V\cdot\Psi = i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ **ή** $\hat{H}\Psi = i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}$. Ενώ για την χρονοανεξάρτητη εξίσωση $-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2\Psi + V\cdot\Psi = E\Psi$ προκύπτει $\hat{H}\Psi = E\Psi$.

Β. Οι τιμές του φυσικού μεγέθους Α, ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου ερμιτιανού τελεστού του $\hat{A}$ οι οποίες είναι πραγματικοί αριθμοί.

Γ. Η κυματοσυνάρτηση Ψ η οποία προκύπτει ως λύση της εξίσωσης του Schrödinger, είναι εν γένει μια **μιγαδική** συνάρτηση.

Δ. Αντιμεταθέτης $[\hat{A}, \hat{B}]$, δυο τελεστών ονομάζεται ο τελεστής $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ δηλαδή $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Όταν $[\hat{A}, \hat{B}]=0$ τότε λέμε ότι οι δυο τελεστές αντιμετατίθενται.

<u>ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ:</u>

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε δυο γραμμικοί τελεστές να έχουν ένα πλήρες σύνολο ιδιοσυναρτήσεων κοινό , είναι να αντιμετατίθενται.

Ε. Η κυματοσυνάρτηση $\Psi(\vec{r},t)$ (τροχιακό), δεν έχει από μόνη της κάποια φυσική σημασία. Απλώς αν $\Psi(\vec{r},t)=0$ δεν υπάρχει σωματίδιο ενώ αν $\Psi(\vec{r},t)\neq 0$ σίγουρα υπάρχει σωματίδιο.
Αυτό όμως που έχει σημασία είναι η $|\Psi(\vec{r},t)|^2 = \Psi(\vec{r},t)^* \Psi(\vec{r},t)$, η οποία εκφράζει την **πυκνότητα πιθανότητας** να βρεθεί το σωματίδιο σε κάποια περιοχή του χώρου.
Επειδή όμως εφόσον $\Psi(\vec{r},t) \neq 0$ σίγουρα υπάρχει σωματίδιο στην περιοχή του χώρου όγκου V, με ενέργεια E, δηλαδή η πιθανότητα είναι p=1 θα έχουμε και $p = \int_V \Psi^*\Psi\, dV = 1$.

25) Για τον αντιμεταθέτη $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ ισχύει:

α) $[\hat{x}, \hat{p}_x]=0$

β) $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$

γ) $[\hat{x}, \hat{p}_x]=1$

δ) $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ δεν ορίζεται.

Απάντηση:

Θεωρώντας τη συνάρτηση Ψ(x) θα έχουμε $[\hat{x}, \hat{p}_x]\Psi(x) = \hat{x}\,\hat{p}_x\,\Psi(x) - \hat{p}_x\,\hat{x}\Psi(x)$. Όμως $\hat{x} = x$ και $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$, άρα θα έχουμε $[\hat{x}, \hat{p}_x]\Psi(x) = -xi\,\hbar\frac{d\Psi}{dx} + i\,\hbar\frac{d(x\Psi)}{dx} =$
$= -i\,\hbar x\frac{d\Psi}{dx} + i\,\hbar x\frac{d\Psi}{dx} + i\,\hbar\Psi = i\,\hbar\Psi \Rightarrow [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\,\hbar$.

§7.8 Πηγάδια Δυναμικού

Είπαμε πως η διαφορική εξίσωση του Schrödinger για ένα σωματίδιο που:
α) κινείται πάνω στον άξονα των x
β) σε μια περιοχή όπου υπάρχει ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων και
γ) για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (χρονοανεξάρτητη εξίσωση)
έχει τη μορφή:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} + U_{(x)}.\Psi_{(x)} = E\cdot\Psi_{(x)} \qquad (1)$$

η λύση της εξίσωσης αυτής είναι η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου .

Εξάλλου από τη συνθήκη κανονικοποίησης έχουμε $\sum_{o}^{L} |\Psi|^2.d\,x = 1$ δηλαδή το σωματίδιο σίγουρα βρίσκεται κάπου , πάνω στον άξονα των x και στο διάστημα από 0 έως L.

Α) Πηγάδι δυναμικού απείρου βάθους

Είναι το κουτί που είπαμε και στην προηγούμενη παράγραφο .
Χαρακτηριστική περίπτωση είναι ο πυρήνας των ατόμων και η κίνηση των ηλεκτρονίων σ΄ένα μέταλλο.

Σ' ένα τέτοιο πηγάδι δυναμικού είναι
$U = 0$ για $0 \le x \le L$ και
$U = \infty$ για $x < 0$ και $x > L$.
Τότε η λύση της εξίσωσης (1) για τις κυματοσυναρτήσεις του σωματίου είναι :
$\Psi_n(x) = 0$ για $x < 0$ και $x > L$ και
$\Psi_n(x) = A$ ημ $\frac{n\pi x}{L}$ για $0 \le x \le L$ με $n = 1,2,3 \ldots$ με ορμή $\rho = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2L}$ αφού $L = n\cdot\frac{\lambda}{2}$ και ενέργεια E του ηλεκτρονίου, η οποία είναι ίση μόνο με την κινητική του ενέργεια, άρα $K = E = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} \Rightarrow$

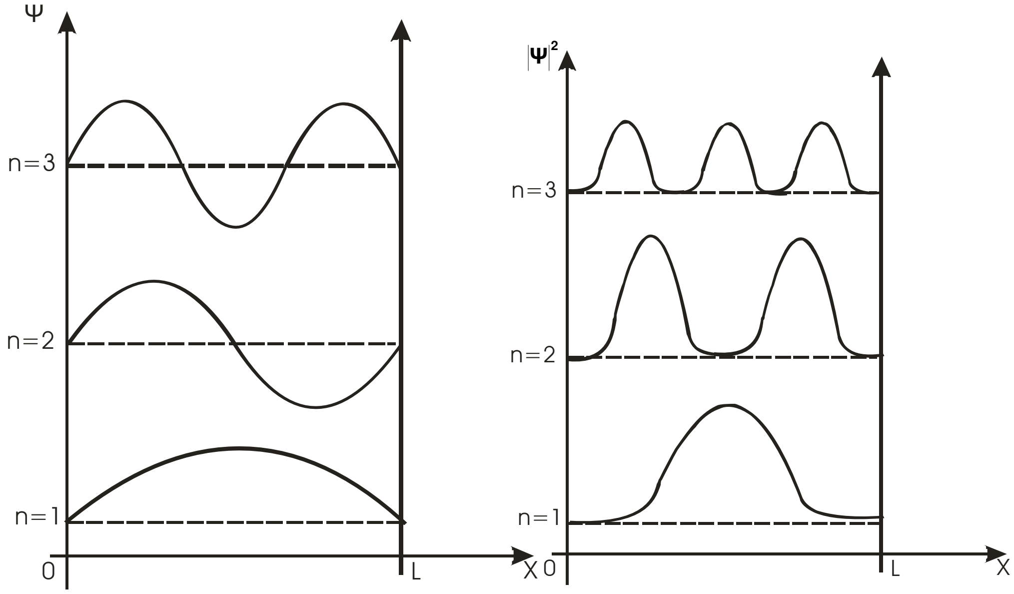
$$\Rightarrow E = \frac{n^2 4\pi^2\hbar^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = n^2\cdot E_1.$$

Απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η ολική ενέργεια είναι κβαντισμένη και **διάφορη του μηδενός** ($n \neq 0$), παντού μέσα στο κουτί .

Ακόμη παρατηρούμε ότι η ενεργειακή διαφορά μεταξύ δυο ενεργειακών σταθμών αυξάνεται καθώς αυξάνεται το n και τέλος

Όσο μικρότερο είναι το πλάτος L του πηγαδιού τόσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια των ενεργειακών καταστάσεων. Σε αυτό το μικρό πλάτος του πυρήνα των ατόμων οφείλεται και η μεγάλη ενέργεια των νουκλεονίων του.

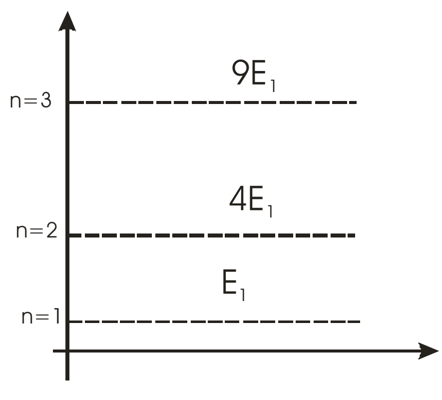
Ακόμη αφού Ψ_n (x) = 0 για x < 0 και x > L τότε και $|\Psi|^2$=0 δηλαδή η πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο έξω από το κουτί είναι μηδέν .
Δηλαδή το μονοδιάστατο φρέαρ (κουτί), ανακλά πλήρως το σωμάτιο, το οποίο κινείται μόνο μεταξύ 0 και L.
Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της κυματοσυνάρτησης **Ψ(x)** για τους τρεις πρώτους κβαντικούς αριθμούς, καθώς και οι αντίστοιχες πιθανότητες $|\Psi(x)|^2$ **.**



- Παρατηρείστε από τις γραφικές παραστάσεις ότι η κυματοσυνάρτηση Ψ_n (x) είναι μηδέν παντού έξω από το κουτί καθώς και για x = 0 και x = L , Ψ_n (x) = 0.

(για x=0 έχουμε $\Psi_n (0) = A$ ημ $\frac{n\pi 0}{L}$ =Α·ημ0=0)

- Ακόμη η πιθανότητα $|\Psi|^2$ να βρίσκεται το σωμάτιο (π.χ e^-), έξω από το πηγάδι δυναμικού απείρου βάθους είναι μηδέν δηλ $|\Psi|^2 = 0$ για x < 0 και x> L ενώ ακόμη η $|\Psi|^2$ είναι και ανεξάρτητη του χρόνου . Επίσης παρατηρούμε από τη γραφική παράσταση $|\Psi|^2$ (x) ότι όλες οι θέσεις δεν έχουν την ίδια πιθανότητα για να βρεθεί το σωμάτιο στο διάστημα $0 \le x \le L$.
- Τέλος το πλήθος των ενεργειακών σταθμών είναι άπειρο n = 1 . . . ∞ και η απόσταση ανάμεσα σε δυο ενεργειακές στάθμες δεν είναι σταθερή , αλλά μεγαλώνει όσο αυξάνει , η τιμή του n , σε αντίθεση με το άτομο του



Η, όπου η απόσταση δυο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών ελαττώνεται με την αύξηση του n.

Δηλαδή ένα τετραγωνικό πηγάδι με άπειρο βάθος έχει και άπειρες τιμές για το n δηλαδή άπειρο αριθμό δέσμιων καταστάσεων κάτι που δεν ισχύει για πηγάδι πεπερασμένου βάθους .

Β) Πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους ή αλλιώς δυναμικό τετραγωνικού πηγαδιού .

Σ' ένα τέτοιο πηγάδι η συνάρτηση δυναμικού U(x) (στην πραγματικότητα συνάρτηση δυναμικής ενέργειας), που παρουσιάζεται στην εξίσωση του Schrödinger είναι

$U(x) = 0$ για $0 \leq x \leq L$ και

$U = U_o$ για $x < 0$ και $x > L$

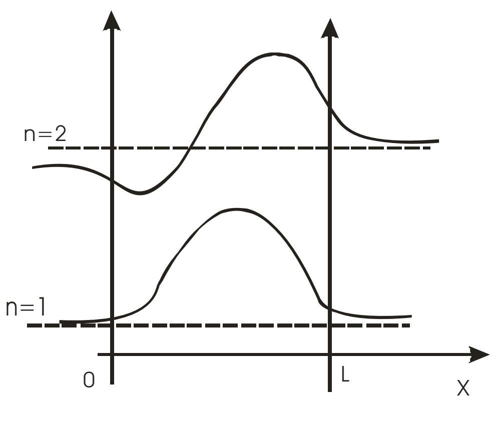
Τότε αποδεικνύεται ότι η λύση της εξίσωσης του Schrödinger μας δίνει

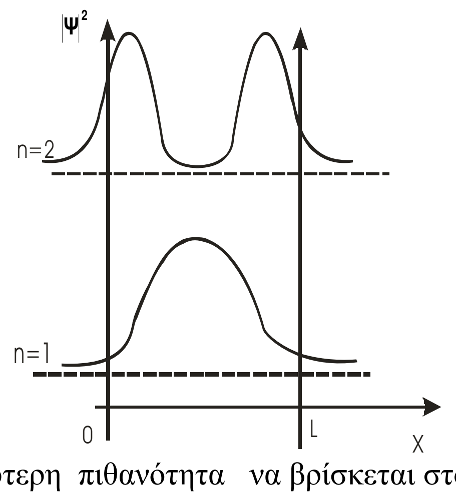
$$\Psi_n(x) = C_1 \,\eta\mu\, \frac{n\pi x}{L} + C_2 \,\sigma\upsilon\nu\, \frac{n\pi x}{L} \text{ για } 0 \leq x \leq L \text{ και}$$

$$\Psi_n(x) = D_1 e^{kx} + D_2 e^{-kx} \text{ για } x < 0 \text{ και } x > L$$

Δηλαδή και έξω από το πηγάδι **δεν** είναι Ψ (x) = 0 αλλά υπάρχει η πιθανότητα το σωματίδιο να είναι και έξω από το πηγάδι δυναμικού ακόμη και αν δεν έχει την απαιτούμενη ενέργεια (φαινόμενο σήραγγας) . Η πιθανότητα αυτή αυξάνεται όσο το e^- βρίσκεται σε υψηλότερη ενεργειακή στάθμη (μεγαλύτερη τιμή για το n).

- Έτσι σ' ένα πηγάδι πεπερασμένου βάθους οι κυματοσυναρτήσεις των δέσμιων καταστάσεων είναι **ημιτονοειδείς** μέσα στο πηγάδι και **εκθετικές** έξω απ΄ αυτό , και πλησιάζουν εκθετικά την τιμή Ψ = 0 για μεγάλα $|x|$. Έτσι στη γραφική παράσταση της $\Psi_{(x)}$ εμφανίζονται τα εκθετικά τμήματα σαν ουρές που εκτείνονται έξω από το πηγάδι όπου σύμφωνα με τη Νευτώνεια μηχανική **δεν** θα' έπρεπε να βρίσκεται το σωμάτιο γιατί θα έχει αρνητική κινητική ενέργεια .





✓ Για n = 1 το σωματίδιο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να βρίσκεται στο μέσο της απόστασης (0 – L), παρά στα άκρα της. Μόνο για μεγάλες τιμές του κύριου κβαντικού αριθμού n, δηλαδή για υψηλές ενεργειακές στάθμες η πιθανότητα να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο σε κάποια θέση της παγίδας (0-L) κατανέμεται πιο ομοιόμορφα και συγκλίνει στην άποψη της κλασικής θεωρίας που θεωρεί όλες τιςθέσεις ισοπίθανες.

- ✓ Και η συνάρτηση Ψ (x) και η πρώτη παραγωγός της είναι συνεχείς στα οριακά σημεία x = 0 και x = L . Αλλιώς η δεύτερη παραγωγός $\frac{d^2\psi}{dx^2}$(x) θα απειρίζονταν στα σημεία αυτά ενώ πρέπει να είναι ανάλογη της διαφοράς U_o – E , ($\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m(U_o - E)}{h^2} \cdot \Psi$).
- ✓ Παρατηρούμε ότι και η $|\Psi|^2$ δεν μηδενίζεται απότομα έξω από το πηγάδι αλλά ελαττώνεται **εκθετικά** (ημιπερατά τοιχώματα) και ακόμη όπως και στο πηγάδι απείρου βάθους **δεν** έχουν όλες οι θέσεις την ίδια πιθανότητα.

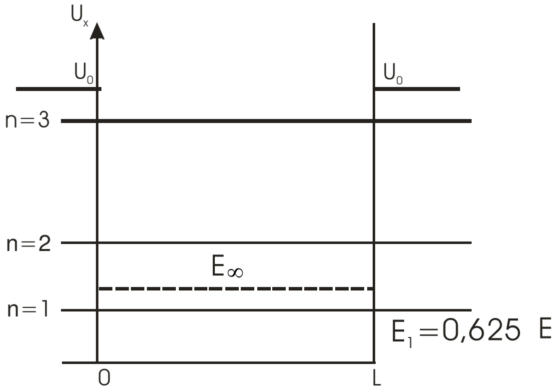
Δηλαδή το ηλεκτρόνιο μπορεί να διαφύγει από την παγίδα του και να βρεθεί έξω από το πηγάδι ακόμη και αν δεν έχει θεωρητικά την απαιτούμενη ενέργεια. Είναι σαν να κλείνουμε ένα μπαλάκι σε ένα κουτί και αυτό να βρίσκεται έξω από αυτό, (φαινόμενο σήραγγας).

Πάντως η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο έξω από το πηγάδι μεγαλώνει όσο το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε υψηλότερη ενεργειακή στάθμη .

Έστω ακόμη ότι E_∞ είναι η ενέργεια της θεμελιώδης στάθμης (n = 1) όταν το πηγάδι έχει άπειρο βάθος και $E_1 = 0{,}625\ E_\infty$ είναι η θεμελιώδης στάθμη όταν το πηγάδι έχει πεπερασμένο βάθος. Παρατηρούμε ότι για πηγάδι πεπερασμένου δυναμικού η ενέργεια της θεμελιώδης στάθμης είναι **λίγο μικρότερη** από την E_∞ . Αυτό ισχύει και για όλες τις υπόλοιπες ενεργειακές στάθμες. Έτσι και το μήκος κύματος λ του σωματίου μέσα στο πεπερασμένο πηγάδι θα είναι **λίγο μεγαλύτερο** απ΄ αυτό που θα είχε σε πηγάδι απείρου βάθους . Δηάδή το πεπερασμένο βάθος του πηγαδιού χαμηλώνει τις ενεργειακές στάθμες σε σύγκριση με τις τιμές για πηγάδι με άπειρο βάθος.

Επίσης το πηγάδι με πεπερασμένο βάθος U_o έχει **πεπερασμένο αριθμό δέσμιων καταστάσεων** και άρα ενεργειακών καταστάσεων και όχι άπειρο όπως έχει το πηγάδι με άπειρο βάθος .

Το πλήθος των ενεργειακών καταστάσεων εξαρτάται από το δυναμικό U_o . Έτσι όταν:



α) η U_o είναι πολύ μεγαλύτερη από την E_∞ (πολύ βαθύ πηγάδι) υπάρχουν πολλές ενεργειακές στάθμες .
β) η U_o είναι μερικές φορές μεγαλύτερη της E_∞ π.χ $U_o = 6\ E_\infty$ υπάρχουν λίγες δέσμιες καταστάσεις (εδώ 3) .
γ) Όμως υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον **μια** δέσμια κατάσταση ακόμη και όταν η U_o είναι μικρότερη της E_∞ , τότε έχουμε ακριβώς μια δέσμια κατάσταση και

δ) όταν η U_o είναι πολύ μικρότερη της $E\infty$ τότε η ενέργεια της μιας και μοναδικής δέσμιας κατάστασης είναι $E = 0{,}68\ U_o$.

ε) Όταν η ενέργεια της κατάστασης Ε είναι μεγαλύτερη από το ύψος του δυναμικού U_o , τότε το σωματίδιο **δεν** είναι δέσμιο , αλλά ελεύθερο και κινείται κατά μήκος όλου του άξονα xx΄ και όχι μόνο στο διάστημα $0 \le x \le L$, μάλιστα τότε η ενέργεια του **δεν είναι κβαντισμένη** και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή , (συνεχές ενεργειακό φάσμα) .
Για ένα ελεύθερο σωματίδιο οι κυματοσυναρτήσεις του είναι ημιτονοειδείς και μέσα και έξω από το πηγάδι .
Όμως **μέσα** στο πηγάδι το κινούμενο σωματίδιο έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια απ' ότι έξω, άρα **μέσα** στο πηγάδι έχει και μικρότερο μήκος κύματος λ .

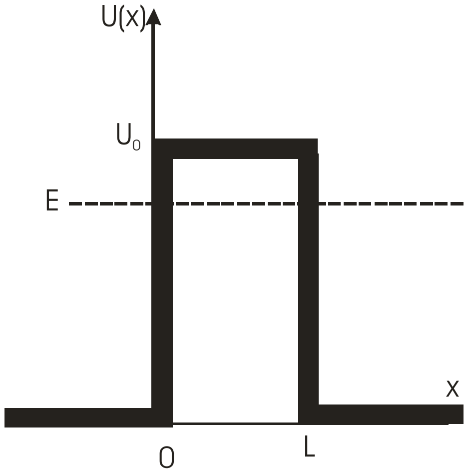
στ) Τέλος μέσα στο πηγάδι είπαμε ότι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι κβαντισμένη όμως απαγορεύεται να πάρει την τιμή μηδέν ($n \neq 0$)
Άρα μέσα στο πηγάδι το σωματίδιο **δεν** ηρεμεί .

Απόδειξη: Αν K=E=0, τότε αυτό σημαίνει πως $\frac{p^2}{2m}=0$, άρα και p=0. Τότε όμως η ορμή του σωματίου είναι πλήρως καθορισμένη και άρα η αβεβαιότητα ως προς την ορμή είναι Δp=0. Σύμφωνα όμως τότε και με την αρχή της αβεβαιότητας θα είναι $\Delta x=\infty$. Όμως η αβεβαιότητα ως προς τη θέση είναι όση και το εύρος του πηγαδιού δηλαδή Δx=L. Έτσι λοιπόν το προηγούμενο συμπέρασμα είναι άτοπο και άρα θα έχουμε $E\neq0$.

§7.9 Φαινόμενο σήραγγας

Ανάλογα με τα πηγάδια δυναμικού έχουμε και τα φράγματα δυναμικού.

Εδώ ένα ηλεκτρόνιο έχει μικρότερη ενέργεια (Ε), από την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια (U_0), ενός ηλεκτρικού πεδίου (φράγμα δυναμικού).
Μια σχηματική παράσταση ενός φράγματος δυναμικού είναι η παρακάτω



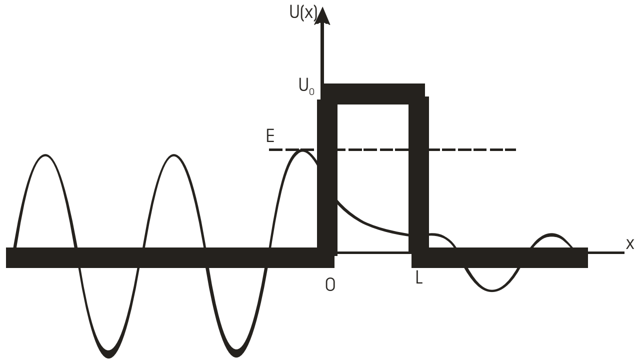
Ενώ τότε σύμφωνα με την κλασική Φυσική θα έπρεπε το ηλεκτρόνιο που έρχεται αντιμέτωπο με ένα τέτοιο φράγμα δυναμικού, να ανακλαστεί και να επιστρέψει προς τα πίσω, σύμφωνα με την κβαντική θεωρία είναι δυνατόν μερικές φορές το ηλεκτρόνιο να διέλθει του φράγματος.
Σαν να υπάρχει μια σήραγγα μέσα από το φράγμα δυναμικού και είναι δυνατό το ηλεκτρόνιο να διαπεράσει το εμπόδιο και να βρεθεί από την άλλη πλευρά , χωρίς να έχει απαραίτητα την ενέργεια που θα χρειαζόταν για να υπερπηδήσει το εμπόδιο .

Οι περιορισμοί που επιβάλλονται από το φράγμα δυναμικού είναι
U=0 για x<0 και x>L και
$U=U_0$ για $0 \leq x \leq L$.

Τότε από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης του Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\cdot\Psi(x) = E\cdot\Psi(x),$$

προκύπτει ότι δεξιά και αριστερά του φράγματος δηλαδή για **x < 0 και x > L** και για την περίπτωση που η ενέργεια Ε του ηλεκτρονίου είναι μικρότερη της U_0 ότι οι λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger και άρα η κυματοσυνάρτηση είναι **ημιτονοειδής**, ενώ μέσα στο φράγμα η λύση έχει **εκθετική μορφή**, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η συνάρτηση είναι εκθετική μέσα στο φράγμα $0 \le x \le L$ και ημιτονοειδής έξω από το φράγμα .

- Επίσης στα σημεία x = 0 και x = L η συνάρτηση Ψ_n (x) και η πρώτη παραγωγός της είναι συνεχής .
- Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση δεν είναι μηδέν μέσα στο φράγμα αλλά υπάρχει πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο όχι μόνο μέσα στο φράγμα αλλά και δεξιά απ' αυτό .

Από τι εξαρτάται η πιθανότητα να διέλθει ένα σωματίδιο μέσα από το φράγμα ;
Η πιθανότητα εξαρτάται από το **πλάτος L** του φράγματος και από το **ύψος U_0** του φράγματος σε σύγκριση με την κινητική ενέργεια Ε του σωματιδίου ($E = \frac{\rho^2}{2m}$).
Η πιθανότητα να διέλθει το κινούμενο σωματίδιο μέσα από το φράγμα δυναμικού, ονομάζεται συντελεστής διέλευσης Τ και είναι ανάλογος του τετραγώνου του λόγου των πλατών των ημιτονικών συναρτήσεων δεξιά και αριστερά του φράγματος . Αποδεικνύεται ότι :

$T = Ae^{-2KL}$ όπου $A = 16\,\frac{E}{U_o}(1 - \frac{E}{U_o})$ και $K = \frac{\sqrt{2m(U_o - E)}}{\hbar}$.

Πάντως όσο πιο **μεγάλο** είναι το πλάτος L του φράγματος τόσο **μικρότερη** είναι η πιθανότητα διέλευσης του σωματιδίου μέσα απ' αυτό. Εξαρτάται επίσης από τη διαφορά ενέργειας $\mathbf{U_o - E}$ **.**

§7.10 Κβαντικός Αρμονικός ταλαντωτής

Υπάρχει όμως περίπτωση η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας,U (x) της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης του Schrödinger
$-\frac{h^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x) = E \cdot \Psi(x)$ να είναι της μορφής $U(x) = \frac{1}{2}K\,x^2$. Τότε η εξίσωση του Schrödinger παίρνει τη μορφή:

$$-\frac{h^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}K\,x^2\cdot\Psi = E\cdot\Psi$$

Και τότε η παραπάνω εξίσωση έχει λύση $\mathbf{\Psi(x)} = Ce^{-\sqrt{mK}x^2/2\hbar}$ όπου η C είναι η σταθερά κανονικοποίησης και προκύπτει από τη συνθήκη κανονικοποίησης:

$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \mathbf{dx} = \mathbf{1}$.

Η ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης του αρμονικού ταλαντωτή αποδεικνύεται ότι είναι $E_o = \frac{1}{2}h\,f = \frac{1}{2}\,h\,\frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow E_o = \frac{1}{2}\hbar\,\omega$ επειδή $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ άρα $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}}$ άρα και $E_o = \frac{1}{2}\,\hbar\sqrt{\frac{K}{m}}$.

Απόδειξη:

Η ενέργεια του ταλαντωτή γράφεται $E=K+U=\frac{\Delta p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\Delta x^2$ ή

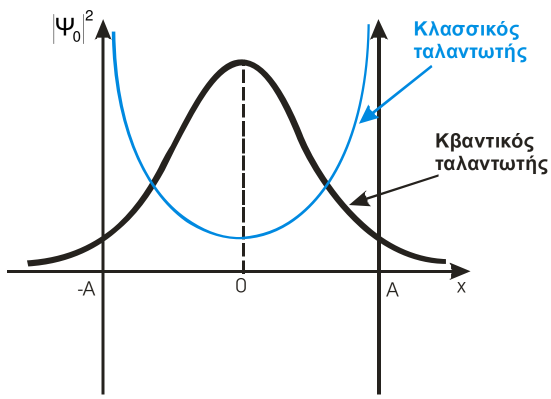
$E=(\frac{\Delta p}{\sqrt{2m}})^2 + (\frac{\sqrt{m}.\omega.\Delta x}{\sqrt{2}})^2 \geq 2\cdot(\frac{\Delta p}{\sqrt{2m}})\cdot(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}\cdot\omega\cdot\Delta x)$ αφού $\alpha^2+\beta^2\geq 2\cdot\alpha\cdot\beta$. Τότε έχουμε και $E\geq\omega\cdot\Delta p\cdot\Delta x$. Επειδή όμως και $\Delta p\cdot\Delta x\geq\frac{\hbar}{2}$, προκύπτει τελικά $E\geq\frac{\hbar}{2}\omega$. Άρα $E_{min}=\frac{1}{2}\cdot\hbar\cdot\omega=\frac{1}{2}\cdot h\cdot f$.

Τότε για τις υπόλοιπες στάθμες αποδεικνύεται ότι είναι
$En = (n + \frac{1}{2})\, \hbar\, \omega = (n + \frac{1}{2})\, \hbar \sqrt{\frac{K}{m}} =(n + \frac{1}{2})\, h.f$ (n = 0,1,2,3 . . .).

Δηλαδή οι ενεργειακές στάθμες είναι περιττά ημιπολλαπλάσια
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} . . .)$ της ποσότητας $\hbar\, .\, \omega$

Προσέξτε:
Α) Ότι στον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή η μικρότερη επιτρεπόμενη ενέργεια δεν είναι $E_0=0$ αλλά $E_0=\frac{1}{2}$ h.f$=\frac{1}{2}$ $\hbar.\omega$
Β) Ακόμη οι αποστάσεις μεταξύ δυο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών για τον αρμονικό ταλαντωτή είναι σταθερές ΔΕ=h.f, ενώ στο άτομο του Η ελαττώνονται και για σωμάτιο σε κουτί αυξάνονται.
Αυτό ισχύει γιατί στον αρμονικό ταλαντωτή έχουμε $En = (n + \frac{1}{2})\, h.f$ n=0,1,2,… στο άτομο του Η έχουμε $En=\frac{E_1}{n^2}$ n=1,2,3,…. και για σωμάτιο σε κουτί έχουμε $En=n^2.E_1$ n=1,2,3,….

Γ) Ακόμη στον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή η $|\Psi|^2$ δεν μηδενίζεται απότομα έξω από τα όρια -Α, Α αλλά ελαττώνεται εκθετικά (εκθετικές ουρές) όπως στο πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους.
Έτσι για n=0 είναι
$E_0=(n + \frac{1}{2})\hbar\ \omega =\frac{1}{2}$ $\hbar.\omega$ και έχουμε το διπλανό σχήμα:



Παρατηρείστε ότι για τον **κλασικό** αρμονικό ταλαντωτή και για n=0, η πιθανότητα είναι μέγιστη να βρεθεί το σωμάτιο στα ακραία σημεία (-Α,Α) της κίνησης γιατί εκεί το σωμάτιο κινείται αργά, ενώ έχει ελάχιστη πιθανότητα να βρεθεί στη θέση x=0. Αντίθετα για τον **κβαντικό** αρμονικό ταλαντωτή το σωμάτιο έχει μέγιστη πιθανότητα να βρεθεί στη θέση x=0, δηλαδή στο μέσο της απόστασης -ΑΑ. Για μεγάλες όμως τιμές του n, ο κβαντικός ταλαντωτής τείνει να συμπεριφέρεται όπως και ο κλασικός.

26) Ένα σώμα μάζας m=1 Kg πραγματοποιεί γραμμική αρμονική ταλάντωση πλάτους A= $\sqrt{\pi}$ cm,δεμένο σε ελατήριο σταθεράς K= 100 N/m. Τότε αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα αποτελεί κβαντικό ταλαντωτή τότε ο κβαντικός αριθμός (n), της στάθμης στην οποία βρίσκεται ο ταλαντωτής είναι:

α) n=π

β) $n=10^{33}/66$

γ) $n \to 0$

δ) $n=K \cdot A^2/2m$.

Απάντηση:

Η περίοδος T του ταλαντωτή είναι $T=2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{\pi}{5}$ s. Τότε επειδή οι αποστάσεις μεταξύ δυο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών για τον αρμονικό ταλαντωτή είναι σταθερές $\Delta E = h.f = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{5}{\pi} = \frac{33.10^{-34}}{\pi}$ J. Η ολική ενέργεια του κβαντικού τακαντωτή μας είναι $En = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 = \frac{\pi}{200}$ J.

Ακόμη έχουμε $En = \left(n + \frac{1}{2} \right) h.f = n' \cdot \Delta E$ ή $n' = \frac{En}{\Delta E} = \frac{\pi/200}{33.10^{-33}} = \frac{10^{33}}{66}$ J.